Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 2, 10.10.2024

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Olkoon $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 2$. Perustele miksi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio. Määritä $Df^{-1}(3)$. Ohje: Käytä käänteisfunktion derivointisääntöä. On selvitettävä sellainen x, jolla $f(x) = 3$ (miksi?) Kokeile joitain pieniä lukuarvoja tämän yhtälön ratkaisemiseksi.

   Mallivastaus: $f'(x) = 15x^4 + 6x^2 \geq 0$, joten funktio on kasvava (jopa aidosti, kun $x \neq 0$). Näin ollen f on injektio. Voidaan todeta, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ joten f saa miten tahansa suuria ja miten tahansa pieniä arvoja. Jatkuvana funktiona f saa kaikki arvot kahden saavuttamansa arvon väliltä (Bolzanon lause lukion oppimäärästä), joten f saa kaikki reaaliarvot. Näin ollen f on bijektio.

   Kokeilemalla voidaan todeta, että $f(1) = 3$. Näin ollen

   $$Df^{-1}(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{15 \cdot 1^4 + 6 \cdot 1^2} = \frac{1}{21}.$$

2. Yhtälö

   $$2x^3y - 5xy^3 + y^4 - 7 = 0$$

   määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (2, 1)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Totea että piste $(2, 1)$ toteuttaa yhtälön ja määritä $f'(2)$.

   Mallivastaus: Sijoittamalla yhtälöön $(x, y) = (2, 1)$ voidaan suoraan todeta, että tämä toteuttaa yhtälön.

   Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

   $$6x^2y+2x^3y'-5y^3-15xy^2y'+4y^3y' = 0 \Leftrightarrow (2x^3-15xy^2+4y^3)y' = -6x^2y+5y^3,$$

   josta

   $$y' = \frac{-6x^2y + 5y^2}{2x^3 - 15xy^2 + 4y^3}$$

   Sijoittamalla $(x, y) = (2, 1)$ saadaan

   $$y'(1) = -\frac{19}{10}.$$

3. Parametrimuoto $\{2t^3 - 3t^2 + t + 1, t^2 + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (7, 6)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Määritä $f'(7)$.

   Mallivastaus: Ensiksi on selvitettävä, millä parametrin arvolla saavutetaan piste $(7, 6)$. Tämä selviää yhtälöparin

   $$\begin{cases} 2t^3 - 3t^2 + t + 1 &= 7 \\ t^2 + 2 &= 6. \end{cases}$$

   Näistä jälkimmäinen yhtälö on helpompi ratkaista, ratkaisut ovat $t = \pm 2$. Vain $t = 2$ toteuttaa ensimmäisen yhtälön, joten ainoa t:n arvo, jolla piste $(7, 6)$ saavutetaan, on $t = 2$.

Tällöin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{6t^2 - 6t + 1},$$

ja sijoittamalla $t = 2$ saadaan $y'(7) = \frac{4}{13}$.

4. Olkoon $f(x, y) = 2x^3y - 5xy^3 + y^4 - 7$. Laske $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

   Mallivastaus: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y - 5y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12xy$, $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 6x^2 - 15y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 - 15xy^2 + 4y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -30xy + 12y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 - 15y^2$.

5. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Määritä $f^{(n)}(x)$ kun $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Mallivastaus: $f(x) = (1 - x)^{-1}$, josta $f'(x) = -(1 - x)^{-2})(-1) = (1 - x)^{-2}$, $f''(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = -6(1-x)^{-4}(-1) = 6(1-x)^{-4}$, $f^{(4)}(x) = -24(1 - x)^{-5}(-1) = 24(1 - x)^{-5}$, ja $f^{(5)}(x) = -120(1 - x)^{-6}(-1) = 120(1 - x)^{-6}$.

6. Määritä $\displaystyle\int x \ln x \, dx$. Vihje: Osittaisintegrointi.

   Mallivastaus:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int \frac{d}{dx} \frac{1}{2} x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

7. Määritä $\displaystyle\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ käyttämällä sijoitusta $x = t^2$.

   Mallivastaus: Kun $x = t^2$, on $\frac{dx}{dt} = 2t$, ja siksi

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{\sin t}{t} 2t \, dt = 2 \int \sin t = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C.$$

8. Määritä $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+3)} \, dx$. Vihje: Etsi luentoesimerkin mukaisesti sellaiset luvut A ja B että

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}. \tag{1}$$

   Mallivastaus: Kertomalla yhtälö (1) tekijällä $x + 3$ saadaan

$$\frac{1}{x-2} = \frac{A(x+3)}{x-2} + B,$$

   ja sijoittamalla $x = -3$ saadaan $-\frac{1}{5} = B$.
   Kertomalla yhtälö (1) tekijällä $x - 2$ saadaan

$$\frac{1}{x+3} = A + \frac{B(x-2)}{x+3},$$

   ja tähän sijoittamalla $x = 2$ saadaan $\frac{1}{5} = A$.
   Näin ollen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+3)(x-2)} \, dx &= \frac{1}{5} \int \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \Big) \, dx \\ &= \frac{1}{5} \Big(\ln|x-2| - \ln|x+3| \Big) = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

9. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^4}.$$

Vihje: L'Hospitalin sääntö.

Mallivastaus: L'Hospitalin sääntöä käyttämällä toistuvasti saadaan

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} + x^2 - 1}{x^4} \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}(-2x) + 2x}{4x^3} \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}(4x^2 - 2) + 2}{12x^2} \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}(-8x^3 - 12x)}{24x} \\
= & \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12)}{24} \\
= & \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Huomautus: Vähemmällä määrällä L'Hospitalin säännön soveltamisia päästään, jos toisella rivillä supistaa x:llä.