Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 3, 17.10.2024

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Löydöksen ikä ajoitetaan kaavalla $T(x) = -k \ln x$, missä $k = 8267$ ja $x = \frac{N}{N_0}$ on jäljellä olevien hiili-14 ytimien osuus. Esitä lineaarinen arvio ajoitusvirheelle $\Delta T = T(x + \Delta x) - T(x)$ kun x:n virhe on Δx. Kuinka suuri ajoitusvirhe on arvion perusteella korkeintaan, kun oikea arvo $x = 0,80$ on mitattu väärin arvoksi $x + \Delta x$ ja tiedetään että $|\Delta x| \leq 0,03$? Tässä tehtävässä voi käyttää laskinta tai matematiikkaohjelmaa ajoitusvirheen numeerisen arvion löytämiseksi.

2. Etsi differentiaaliyhtälölle $y' = 5y$ ratkaisu, jolle $y(0) = 2$. Vihje: Luentoesimerkki.

3. Etsi differentiaaliyhtälölle $y^2 y' = 3$ ratkaisu, jolle $y(0) = 1$. Vihje: Luentoesimerkki. Mieti myös millaisen funktion derivaattafunktio on y^2.

4. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^5 + 2x - 1 = 0$ likimääräisen ratkaisun löytämiseksi sellaisella tarkkudella, jossa vaikuttaa olevan 8 desimaalia oikein. Ohje: Valitse alkuarvo siten, että se vaikuttaisi olevan lähellä nollakohtaa. Tässä tehtävässä voi käyttää laskinta tai matematiikkaohjelmaa.

5. Funktiolla $\frac{1}{1-x}$ on pisteessä $x = 0$ tunnettu Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$$

Onko siis seuraava oikein kun $x \to 0$:

$$\frac{1}{6-x} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{x}{6}} = \frac{1}{6}(1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{216} + O(x^4))?$$

Entä onko seuraava oikein kun $x \to 5$:

$$\frac{1}{6-x} = \frac{1}{1-(x-5)} = 1 + (x-5) + (x-5)^2 + (x-5)^3 + O((x-5)^4)?$$

Kumpi näistä on ”oikea” Taylorin kehitelmä funktiolle $f(x) = \frac{1}{6-x}$?

6. Etsi funktiolle $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$ astetta 6 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ohje: Kts. Demo 2 ja luentoesimerkki.

7. Etsi kosinifunktiolle viidennen asteen Taylorin polynomi pisteessä $\frac{\pi}{2}$. Kirjoita polynomi muodossa

$$c_0 + c_1(x - \frac{\pi}{2}) + c_2(x - \frac{\pi}{2})^2 + \ldots,$$

äläkä kerro sulkeita auki.

8. Etsi funktiolle $f(x) = (\cos x)^2$ astetta 4 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Vihje: Voit käyttää tunnettua kehitelmää $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ ja kertoa tämän itsensä kanssa.

9. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2}$$

Käyttämällä Taylorin kehitelmiä.