Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 3, 17.10.2024

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Löydöksen ikä ajoitetaan kaavalla $T(x) = -k \ln x$, missä $k = 8267$ ja $x = \frac{N}{N_0}$ on jäljellä olevien hiili-14 ytimien osuus. Esitä lineaarinen arvio ajoitusvirheelle $\Delta T = T(x + \Delta x) - T(x)$ kun x:n virhe on Δx. Kuinka suuri ajoitusvirhe on arvion perusteella korkeintaan, kun oikea arvo $x = 0,80$ on mitattu väärin arvoksi $x + \Delta x$ ja tiedetään että $|\Delta x| \leq 0,03$? Tässä tehtävässä voi käyttää laskinta tai matematiikkaohjelmaa ajoitusvirheen numeerisen arvion löytämiseksi.

   Mallivastaus:
   $$\Delta T \approx T'(x)\Delta x,$$
   ja koska $T'(x) = -\frac{k}{x}$, on
   $$|\Delta T| \approx \left|\frac{k}{x}\right| |\Delta x| .$$
   Sijoittamalla tähän annetut lukuarvot saadaan
   $$|\Delta T| \approx \left|\frac{8267}{0,80}\right| |\Delta x| \leq \frac{8267}{0,80} \cdot 0,03 = 310,013.$$
   Näin ollen ajoitusvirhe on maksimissaan suunnilleen 310 (vuotta)

2. Etsi differentiaaliyhtälölle $y' = 5y$ ratkaisu, jolle $y(0) = 2$. Vihje: Luentoesimerkki.

   Mallivastaus: Merkitään muuttujaa symbolilla x. Tällöin differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon
   $$\frac{y'}{y} = 5 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |y| = 5 \Leftrightarrow \ln |y| = 5x + C \Leftrightarrow |y| = e^{5x+C} = e^C e^{5x}.$$
   Koska $y(0) = 2 > 0$ ja eksponenttifunktio saa vain positiivisia arvoja, on välttämättä $e^C > 0$ ja $y = e^C e^{5x}$. Sijoittamalla $x = 0$ saadaan $2 = e^C$, josta lopulta $y = 2e^{5x}$.

3. Etsi differentiaaliyhtälölle $y^2 y' = 3$ ratkaisu, jolle $y(0) = 1$. Vihje: Luentoesimerkki. Mieti myös millaisen funktion derivaattafunktio on y^2.

   Mallivastaus: Merkitään edelleen muuttujaa symbolilla x. Tällöin differentiaaliyhtälö saadaan muotoon
   $$\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}y^3) = 3,$$
   josta saadaan $\frac{1}{3}y^3 = 3x + C$, ja edelleen $y = \sqrt[3]{9x + 3C}$. Sijoittamalla $x = 0$ saadaan $1 = \sqrt[3]{3C}$, josta $C = \frac{1}{3}$.

4. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^5 + 2x - 1 = 0$ likimääräisen ratkaisun löytämiseksi sellaisella tarkkudella, jossa vaikuttaa olevan 8 desimaalia oikein. Ohje: Valitse alkuarvo siten, että se vaikuttaisi olevan lähellä nollakohtaa. Tässä tehtävässä voi käyttää laskinta tai matematiikkaohjelmaa.

Mallivastaus: Iteroitava funktio on $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^5+2x-1}{5x^4+2}$. Valitaan esim.$x_0 = 0$ lähtöarvoksi, jolloin

$x_1 = g(x_0) = 0.5$, $x_2 = g(x_1) = 0.486486486486$, $x_3 = g(x_2) = 0.486389040729$, $x_4 = g(x_3) = 0.486389035935$, $x_5 = g(x_4) = 0.486389035935$, mistä voidaan uskoa, että jo arvo x_4 on jo ainakin kahdeksan desimaalin tarkkuudella oikein.

5. Funktiolla $\frac{1}{1-x}$ on pisteessä $x = 0$ tunnettu Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$$

Onko siis seuraava oikein kun $x \to 0$:

$$\frac{1}{6-x} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{x}{6}} = \frac{1}{6}(1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{216} + O(x^4))?$$

Entä onko seuraava oikein kun $x \to 5$:

$$\frac{1}{6-x} = \frac{1}{1-(x-5)} = 1 + (x-5) + (x-5)^2 + (x-5)^3 + O((x-5)^4)?$$

Mallivastaus: Molemmat ovat oikein. Ensimmäinen on funktion Taylorin kehitelmä pisteessä $x = 0$, ja toinen Taylorin kehitelmä pisteessä $x = 5$.

6. Etsi funktiolle $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$ astetta 6 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ohje: Kts. Demo 2 ja luentoesimerkki.

Mallivastaus: Demon 2/tehtävä 8 mukaan mukaan

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+3}.$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x+3)} &= \frac{1}{5}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+3} = -\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{15}\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})} \\
&= -\frac{1}{10}(1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2})^3 + \frac{x}{2}^4 + (\frac{x}{2})^5 + (\frac{x}{2})^6 + O(x^7) \\
&- \frac{1}{15}(1 - \frac{x}{3} + (-\frac{x}{3})^2 + (-\frac{x}{3})^3 + (-\frac{x}{3})^4 + (-\frac{x}{3})^5 + (-\frac{x}{3})^6) + O(x^7) \\
&= -\frac{1}{6} - \frac{1}{36}x - \frac{7}{215}x^2 - \frac{13}{1296}x^3 - \frac{55}{7776}x^4 - \frac{133}{46656}x^5 - \frac{463}{279936}x^6 + O(x^7)
\end{aligned}$$

7. Etsi kosinifunktiolle viidennen asteen Taylorin polynomi pisteessä $\frac{\pi}{2}$. Kirjoita polynomi muodossa

$$c_0 + c_1(x - \frac{\pi}{2}) + c_2(x - \frac{\pi}{2})^2 + \ldots,$$

äläkä kerro sulkeita auki.

Mallivastaus:

$$\cos x = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{120}(x - \frac{\pi}{2})^5 + O((x - \frac{\pi}{2})^7).$$

8. Etsi funktiolle $f(x) = (\cos x)^2$ astetta 4 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Vihje: Voit käyttää tunnettua kehitelmää $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ ja kertoa tämän itsensä kanssa.

   Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
(\cos x)^2 &= (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6))(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\
&- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + O(x^6) \\
&+ \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\
&+ O(x^6) \\
&= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^6).
\end{aligned}$$

9. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2}$$

   Käyttämällä Taylorin kehitelmiä.

   Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2} \\
=\ &\frac{x^4 + x^2 + 1 - \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{24}(x^2)^4 + O((x^2)^6) - (1 + x^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{6}(x^2)^3 + \frac{1}{24}(x^2)^4 + O((x^2)^5))}{x^2 - \frac{1}{6}(x^2)^3 + O((x^2)^5) - x^2} \\
=\ &\frac{-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{10})}{-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{10})} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^4)}{-\frac{1}{6} + O(x^4)} \xrightarrow{x \to 0} 1.
\end{aligned}$$