Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 4, 24.10.2024

1. Valitaan tarkasteluväliksi $[0,1]$ ja funktioksi $f(x) = e^x$. Valitaan lisäksi välin $[0,1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

2. Selvitä integraalin $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Ohje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \to \infty$.

3. Määritä $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Vihje: Voit merkitä funktion $\frac{\sin t}{t}$ antiderivaattaa jollain symbolilla $F(t)$.

4. Määritä pinta-ala, joka jää suorien $x = 1$, $x = 3$, x-akselin, ja käyrän $y = x^3$ väliin.

5. Määritä pinta-ala, joka jää suorien $x = 0$, $x = 2$, sekä käyrien $y = x^2$ ja $y = x^3$ väliin.

6. Määritä sen tasokuvion pinta-ala, joka jää suorien $x = -\pi$, $x = \pi$, sekä käyrän $f(x) = |\sin x|$ ja x-akselin väliin.

7. Oletetaan tunnetuksi, että R-säteisen ympyrän kehän pituus on $2\pi R$. Selvitä mikä on R-säteisen ympyrän pinta-ala seuraavalla tavalla: Sovella luennolla mainittua Newtonin ja Leibnizin intuitiota ajattelemalla ympyrä jaettavaksi äärettömän moneen äärettömän kapeaan renkaaseen, joiden kaikkien keskipisteenä on alkuperäisen ympyrän keskipiste. Ajatellaan että kunkin renkaan leveys on dr. Mikä silloin on "äärettömän kapean" renkaan pinta-ala? Esitä vastaus integraalina, jossa integroidaan yli kaikkien "äärettömän kapeiden" renkaiden pinta-alat yhteen ja määritä kyseisen integraalin arvo.

8. Esitä integraalilauseke sen kappaleen tilavuudelle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus ja arvioi kuinka suuri se voi korkeintaan olla.

9. Esitä integraalilauseke sen kappaleen vaipan pinta-alalle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri. (Päätyjen pinta-aloja ei lasketa mukaan, kun puhutaan vaipan pinta-alasta). Arvioi tätä integraalilauseketta ja osoita että pinta-ala on vähintään $2\pi \ln M$.

   Vihje:
   $$\int_1^M 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx \geq \int_1^M 2\pi\frac{1}{x}\,dx,$$
   (miksi ?)