Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 4, 24.10.2024

1. Valitaan tarkasteluväliksi $[0,1]$ ja funktioksi $f(x) = e^x$. Valitaan lisäksi välin $[0,1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

   Mallivastaus:

$$\underline{S}_{D_n} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (e^{\frac{1}{n}})^{k-1} = \frac{1}{n} \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

   ja

$$\overline{S}_{D_n} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}} e^{\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}} \underline{S}_{D_n}.$$

2. Selvitä integraalin $\int_0^1 e^x \, dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Ohje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \to \infty$.

   Mallivastaus: Koska $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$, nähdään, että ylä- ja alasummat saadaan miten tahansa lähelle toisiaan ja tästä voidaan päätellä että funktio on integroituva. Integraalin arvo on ylä- ja alasummien yhteinen raja-arvo, joka voidaan määrittää Taylorin polynomiappoksimaation avulla: Koska $e^x = 1 + x + O(x^2)$, on

$$n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = n(1 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - 1) = 1 + O(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

   Näin ollen

$$\int_0^1 e^x \, dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{D_n} = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{D_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e - 1.$$

3. Määritä $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} \, dt$. Vihje: Voit merkitä funktion $\frac{\sin t}{t}$ antiderivaattaa jollain symbolilla $F(t)$.

   Mallivastaus: Olkoon $F(t)$ funktio, jolle $F'(t) = \frac{\sin t}{t}$. Tällöin

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} \, dt = \Big/_{x^2}^{x^3} F(t) = F(x^3) - F(x^2).$$

   Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} \, dt &= \frac{d}{dx}(F(x^3) - F(x^2)) = F'(x^3) \cdot 3x^2 - F'(x^2) \cdot 2x \\ &= \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x = \frac{3\sin x^3}{x} - \frac{2\sin x^2}{x} \\ &= \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}. \end{aligned}$$

4. Määritä pinta-ala, joka jää suorien $x = 1$, $x = 3$, x-akselin, ja käyrän $y = x^3$ väliin.

   Mallivastaus: Koska $x^3 > 0$ kun $x \in [1, 3]$, saadaan pinta-ala integraalina

$$\int_1^3 x^3\,dx = \Big/_{1}^{3} \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}(3^4 - 1^4) = \frac{1}{4}(81 - 1) = 20.$$

5. Määritä pinta-ala, joka jää suorien $x = 0$, $x = 2$, sekä käyrien $y = x^2$ ja $y = x^3$ väliin.

   Mallivastaus: Yhtälön $x^2 = x^3$ ainoat reaaliset ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = 1$. Lisäksi $x^3 \leq x^2$ kun $x \in (0, 1)$, mutta $x^3 > x^2$, kun $x \in (1, 2)$. Kysytty pinta-ala voidaan siksi laskea määrittämällä ensin välillä $[0, 1]$ käyrien väliin jäävä pinta-ala ja lisäämällä tähän niiden väliin jäävä ala välilla $[1, 2]$.

   Kummassakin tapauksessa voitaisiin käyrien pinta-ala laskea vähentämällä ylemmän käyrän ja x-akselin väliin jäävästä alasta alemman käyrän ja x-akselin väliin jäävä ala, mutta tällä tavoin saadaan integraalilauseke, jossa ylemmän käyrän lauseekkeesta on vähennetty alemman käyrän lauseke. Kysytty pinta-ala on siis

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)\,dx = \Big/_{0}^{1} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4) + \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3) \\
= \;& \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

6. Määritä sen tasokuvion pinta-ala, joka jää suorien $x = -\pi$, $x = \pi$, sekä käyrän $f(x) = |\sin x|$ ja x-akselin väliin.

   Mallivastaus: Koska integrandi on ei-negatiivinen kaikkialla, saadaan pinta-ala integraalina

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\;dx &= \int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big/_{-\pi}^{0} \cos x + \Big/_{0}^{\pi} -\cos x \\
&= 1 - (-1) + 1 - (-1) = 4.
\end{aligned}$$

7. Oletetaan tunnetuksi, että R-säteisen ympyrän kehän pituus on $2\pi R$. Selvitä mikä on R-säteisen ympyrän pinta-ala seuraavalla tavalla: Sovella luennolla mainittua Newtonin ja Leibnizin intuitiota ajattelemalla ympyrä jaettavaksi äärettömän moneen äärettömän kapeaan renkaaseen, joiden kaikkien keskipisteenä on alkuperäisen ympyrän keskipiste. Ajatellaan että kunkin renkaan leveys on dr. Mikä silloin on "äärettömän kapean" renkaan pinta-ala? Esitä vastaus integraalina, jossa integroidaan yli kaikkien "äärettömän kapeiden" renkaiden pinta-alat yhteen ja määritä kyseisen integraalin arvo.

   Mallivastaus: r-säteisen, dr-levyisen renkaan alan ajatellaan olevan $dA = 2\pi r\,dr$, ja koko ympyrän ala saadaan integroimalla kaikkien renkaiden alat yhteen:

$$A = \int_0^R dA = \int_0^R 2\pi r\,dr = \Big/_{0}^{R} \pi r^2 = \pi R^2.$$

8. Esitä integraalilauseke sen kappaleen tilavuudelle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus ja arvioi kuinka suuri se voi korkeintaan olla.

   Mallivastaus: Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi \int_1^M (\frac{1}{x})^2 \, dx = \pi \Big/_1^M -\frac{1}{x} = \pi(1 - \frac{1}{M}) < \pi.$$

9. Esitä integraalilauseke sen kappaleen vaipan pinta-alalle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri. (Päätyjen pinta-aloja ei lasketa mukaan, kun puhutaan vaipan pinta-alasta). Arvioi tätä integraalilauseketta ja osoita että pinta-ala on vähintään $2\pi \ln M$.

   Vihje:

$$\int_1^M 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \geq \int_1^M 2\pi \frac{1}{x} \, dx,$$

   (miksi ?)

   Mallivastaus: Luennolla esitetyn mukaan kyseinen pinta-ala saadaan integraalilausekkeella

$$2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + (-\frac{1}{x^2})^2} \, dx = 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx.$$

   Koska joka tapauksessa $\frac{1}{x^4} > 0$, on kyseinen integraali vähintään

$$2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \, dx = 2\pi \Big/_1^M \ln x = 2\pi \ln M.$$

   Lisäpohdintaa: Edellisen tehtävän mukaan pyörähdyskappaleen tilavuus on rajoitettu, mutta tämän tehtävän mukaan sen pinta-ala ei ole rajoitettu, kun M kasvaa. Miten tämä on mahdollista? Jos pinta-ala kasvaa rajatta, pitäisi esim. pinnan maalaamiseen kuluvan maalimäärän myös kasvaa rajatta. Toisaalta taas edellisen tehtävän mukaan kappale voidaan kaataa täyteen maalia rajallisella määrällä, eikä ainakin sisäpinta tulisi samalla maalatuksi?