# Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

### Demonstraatio 5, 31.10.2024

1. Newtonin gravitaatiolain mukaan kappaleiden (massat $M$ ja $m$, etäisyys $s$) välinen voima on $F = G\frac{Mm}{s^2}$, missä $G$ on gravitaatiovakio ja etäisyys $s$ tarkoittaa massakeskipisteiden välistä etäisyyttä.

   Tarkastellaan tilannetta, jossa toinen kappaleista on maapallo (massa $M$, säde $R$) ja toinen pieni kappale (massa $m$), joka nostetaan tasaisella nopeudella maapallon pinnalta korkeudelle $h$. Tällöin massakeskipisteiden välinen etäisyys kasvaa arvosta $R$ arvoon $R+h$. Ilmanvastusta ei huomioida. Kirjoita nostamisessa tehty työ integraalilausekkeena ja määritä sen arvo. Ohje: Luento 22.10. (3/12)

   Oletetaan lopuksi että $h$ on hyvin pieni $R$:n verrattuna. Käytä Taylorin approksimaatiota saadulle lausekkeelle esittääksesi työn likiarvon muodossa $C \cdot m \cdot h$. Minkä likiarvon saat vakiolle $C$ jos käytät arvoja $G = 6.6734 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6371 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$.

   Ohje: Jos tehty työ on laskettu oikein, esiintyy siinä lauseke $\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}$. Ottamalla $\frac{1}{R}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

   $$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right).$$

   Käytä tunnettua Taylorin kehitelmää sulkujen sisällä olevaan osamäärälausekkeeseen: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ (kun $x \to 0$) ja approksimoi jättämällä toisen asteen termi pois.

2. Olkoot merkinnät kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan, että kappale nostetaan korkeudelle $h = 5R$ ($R$ on maan säde). Laske tehtävä työ sekä integraalilausekkeella että approksimoivalla lausekkeella ja vertaa tuloksia keskenään.

3. Kun valitaan aikayksikkö sopivasti, voidaan vaihtovirran jännitettä kuvata lausekkeella $u(t) = \hat{u}\sin t$, missä $\hat{u} > 0$ on vaihtovirran maksimijännite. Sähkövirran teho on $p = u \cdot i$, missä $i$ on sähkövirta, joka puolestaan voidaan esittää jännitteen avulla, kun resistanssi $R$ on tunnettu: $i = \frac{u}{R}$.

   Laske sähkövirran keskimääräinen teho yli aikavälin $[0, 2\pi]$ ja selvitä miten $\hat{u}$ pitää valita, jotta vaihtovirran keskimääräinen teho vastaisi 230 V tasavirran tehoa. Tasavirran teho määritetään niinikään kaavalla $P = U \cdot I$, missä $U$ on jännite ja $I = \frac{U}{R}$ virta.

   Ohje: $p = u \cdot i = \frac{u^2}{R}$. Sijoita tähän jännitteen $u$ lauseke ja käytä keskiarvon laskemiseksi integraalilla kaavaa $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Jatkuvan suureen keskiarvoa varten kts. luento 22.10 (2/12)

4. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppenevatko seuraavat integraalit:

   $$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

   ja

   $$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx.$$

Vihje: Antiderivaattojen etsimiseksi sijoitus $x = e^t$ voi olla käyttökelpoinen. Sen avulla lienee mahdollista määrittää integraalien arvot, kun ylärajana on $M$.

5. Etsi sopivat vertailufunktiot ja päättele niiden perusteella suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_1^\infty \frac{x+2}{3x^2+2x+1}\,dx$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}+1}{x^3+3x+1}\,dx.$$

Ohje: Supista sellaisella $x$:n potenssilla, että osoittajassa korkeimmaksi jää $x^0$ ja arvioi mikä nimittäjässä jää korkeimmaksi potessiksi.

6. Selvitä suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Mikäli integraali suppenee, määritä sen arvo. Vihje: Suppenemisen selvittämiseksi voi esittää integrandin nimittäjässä olevan lausekkeen muodossa $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ ja miettiä kumpi tulon tekijöistä aiheuttaa epäoleellisuuden kun $x \to 1$. Voi käyttää luentomonisteen huomautusta 29. Lisävihjeenä esimerkki luennolla 16.10 (12/18).

7. Suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}\,dx$$

ja

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^2 n}\,dx.$$

Vihje: Vertaa sopivaan integraaliin.

8. Selvitä suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^\infty n^3\Big(\frac{1}{3}\Big)^n$$

Vihje: vertaa sarjan peräkkäisiä termejä ja selvitä onko niiden osamäärä $\leq c < 1$, kun $n$ on kyllin suuri.

9. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^\infty n\Big(\frac{1}{7}\Big)^n$$

summa. Ohje: Aloita tunnetusta sarjasta (geometrinen)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$$

ja derivoi molemmat puolet, oikea puoli termeittäin. Kerro $x$:llä puolittain ja sijoita lopuksi $x$:n paikalle sopiva luku.