Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2024

Demonstraatio 5, 31.10.2024

1. Newtonin gravitaatiolain mukaan kappaleiden (massat M ja m, etäisyys s) välinen voima on $F = G\frac{Mm}{s^2}$, missä G on gravitaatiovakio ja etäisyys s tarkoittaa massakeskipisteiden välistä etäisyyttä.

   Tarkastellaan tilannetta, jossa toinen kappaleista on maapallo (massa M, säde R) ja toinen pieni kappale (massa m), joka nostetaan tasaisella nopeudella maapallon pinnalta korkeudelle h. Tällöin massakeskipisteiden välinen etäisyys kasvaa arvosta R arvoon $R+h$. Ilmanvastustusta ei huomioida. Kirjoita nostamisessa tehty työ integraalilausekkeena ja määritä sen arvo. Ohje: Luento 22.10. (3/12)

   Oletetaan lopuksi että h on hyvin pieni R:n verrattuna. Käytä Taylorin approksimaatiota saadulle lausekkeelle esittääksesi työn likiarvon muodossa $C \cdot m \cdot h$. Minkä likiarvon saat vakiolle C jos käytät arvoja $G = 6.6734 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6371 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$.

   Ohje: Jos tehty työ on laskettu oikein, esiintyy siinä lauseke $\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}$. Ottamalla $\frac{1}{R}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

   $$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right).$$

   Käytä tunnettua Taylorin kehitelmää sulkujen sisällä olevaan osamäärälausekkeeseen: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ (kun $x \to 0$) ja approksimoi jättämällä toisen asteen termi pois.

   Mallivastaus: Kappaletta nostettaessa tasaisella nopeudella on nostavan voiman oltava yhtä suuri kuin painovoima. Tällöin tehty työ saadaan integraalina

   $$\begin{aligned} W &= \int_R^{R+h} F(s)\,ds \\ &= \int_R^{R+h} \gamma\frac{Mm}{s^2}\,ds \\ &= \gamma Mm \Big/_{R}^{R+h} -\frac{1}{s} \\ &= \gamma Mm\Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\Big). \end{aligned}$$

   Sulkulausekkeelle voidaan löytää Taylorin approksimaatio

   $$\begin{aligned} & \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\Big(1 - \frac{1}{1+\frac{h}{R}}\Big) \\ = \;& \frac{1}{R}\Big(1 - \big(1 - \frac{h}{R} + \big(\frac{h}{R}\big)^2 + \ldots\big)\Big) \\ \approx \;& \frac{1}{R}\Big(\frac{h}{R}\Big) = \frac{h}{R^2}, \end{aligned}$$

   joten

   $$W \approx \gamma\frac{Mmh}{R^2}.$$

Sijoittamalla tähän vakioiden γ, M ja R arvot saadaan

$$W \approx 9.8 \cdot mh.$$

Huomautus: Kerrointa ≈ 9.8 (yksikkö $\mathrm{m/s^2}$) merkitään yleensä symbolilla g. Se on maapallon painovoiman aiheuttama kiihtyvyys putoamisliikkeelle lähellä maan pintaa. Tehtävässä saatu approksimaatio $W \approx mgh$ on yleisesti käytetty kaava sille työn määrälle, joka joudutaan tekemään kun nostetaan kappale (massa m) korkeudelle h. Vaihtoehtoisesti voidaan sanoa, että kappaleen potentiaalienergia kasvaa (likimain) määrän mgh, kun se nostetaan korkeudelle h.

2. Olkoot merkinnät kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan, että kappale nostetaan korkeudelle $h = 5R$ (R on maan säde). Laske tehtävä työ sekä integraalilausekkeella että approksimoivalla lausekkeella ja vertaa tuloksia keskenään.

   Mallivastaus: Integraalilausekkeella saatu arvo on

   $$\gamma Mm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+5R}\right) \approx m \cdot 5,21 \cdot 10^7 J,$$

   kun taas approksimoivalla lausekkella saatu arvo on

   $$mg \cdot 5R \approx m \cdot 3,13 \cdot 10^8 J.$$

   Lähes kymmenkertainen ero tuloksissa johtuu siitä, että approksimoiva lauseke ei huomioi maan vetovoiman heikkenemistä kun kappale etääntyy maan pinnasta. Lisäksi on huomattava, että approksimaatio $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ on hyvä vain kun x on itseisarvoltaan lähellä nollaa. Tehtävässä $x = \frac{h}{R} = \frac{5R}{R} = 5$ on jo melko kaukana nollasta.

3. Kun valitaan aikayksikkö sopivasti, voidaan vaihtovirran jännitettä kuvata lausekkeella $u(t) = \hat{u} \sin t$, missä $\hat{u} > 0$ on vaihtovirran maksimijännite. Sähkövirran teho on $p = u \cdot i$, missä i on sähkövirta, joka puolestaan voidaan esittää jännitteen avulla, kun resistanssi R on tunnettu: $i = \frac{u}{R}$.

   Laske sähkövirran keskimääräinen teho yli aikavälin $[0, 2\pi]$ ja selvitä miten $\hat{u}$ pitää valita, jotta vaihtovirran keskimääräinen teho vastaisi 230 V tasavirran tehoa. Tasavirran teho määritetään niinikään kaavalla $P = U \cdot I$, missä U on jännite ja $I = \frac{U}{R}$ virta.

   Ohje: $p = u \cdot i = \frac{u^2}{R}$. Sijoita tähän jännitteen u lauseke ja käytä keskiarvon laskemiseksi integraalilla kaavaa $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$. Jatkuvan suureen keskiarvoa varten kts. luento 22.10 (2/12)

   Mallivastaus: Vaihtovirran keskimääräinen teho on

   $$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{u}^2 \sin^2 t}{R}\,dt = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,dx \\ &= \frac{\hat{u}^2}{4R\pi} \Big/_0^{2\pi} (t - \frac{1}{2}\sin(2t)) = \frac{\hat{u}^2}{4R\pi} \cdot 2\pi = \frac{\hat{u}^2}{2R}. \end{aligned}$$

   Vastaava teho tasavirralle on $\frac{U^2}{R}$, ja asettamalla lausekkeet yhtäsuuriksi saadaan

   $$\frac{U^2}{R} = \frac{\hat{u}^2}{2R} \Rightarrow \hat{u} = \sqrt{2}U.$$

   Arvolla $U = 230V$ saadaan $\hat{u} \approx 325V$.

4. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

ja

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx.$$

Vihje: Antiderivaattojen etsimiseksi sijoitus $x = e^t$ voi olla käyttökelpoinen. Sen avulla lienee mahdollista määrittää integraalien arvot, kun ylärajana on M.

Mallivastaus: Tehdään sijoitus $x = e^t$ (tällöin $dx = e^t\, dt$) määräämättömään integraaliin:

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1}{e^t \cdot t} e^t\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t + C = \ln \ln x + C.$$

Tällöin

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln x}\, dx = \Big/_{\!\!2}^{M} \ln \ln x = \ln \ln M - \ln \ln 2 \xrightarrow{M\to\infty} \infty$$

Näin ollen ensimmäin integraali hajaantuu.

Määritettäessä antiderivaattaa toisen integraalin integrandille sijoitus $x = e^t$ antaa

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \int \frac{1}{e^t \cdot t^2} e^t\, dt = \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Näin ollen

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \Big/_{\!\!2}^{M} -\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln M} + \frac{1}{\ln 2} \xrightarrow{M\to\infty} \frac{1}{\ln 2}.$$

Jälkimmäinen integraali siis suppenee, ja sen arvo on $\frac{1}{\ln 2}$.

5. Etsi sopivat vertailufunktiot ja päättele niiden perusteella suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_1^\infty \frac{x+2}{3x^2+2x+1}\, dx$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}+1}{x^3+3x+1}\, dx.$$

Ohje: Supista sellaisella x:n potenssilla, että osoittajassa korkeimmaksi jää x^0 ja arvioi mikä nimittäjässä jää korkeimmaksi potessiksi.

Mallivastaus: Ensimmäisen integraalin integrandia supistamalla x:llä nähdään, että vertailufunktioksi kannattaa valita $f(x) = \frac{1}{x}$. Tämä voidaan täsmentää laskemalla

$$\frac{x+2}{3x^2+2x+1} : \frac{1}{x} = \frac{x^2+2x}{3x^2+2x+1} = \frac{1+\frac{2}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{3}.$$

Näin ollen integraalilla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ on samanlainen suppenemiskäyttäytyminen kuin tehtävän ensimmäisellä integraalilla, joka siis hajaantuu (x:n potenssi 1 nimittäjässä ei ole riittävän suuri).

Tehtävän toisessa integraalissa voidaan supistaa $x^{1,5}$, josta havaitaan, että $\frac{1}{x^{1,5}}$ on hyvä lähtökohta vertailuun. Tarkemmin,

$$\frac{x\sqrt{x}+1}{x^3+3x+1} : \frac{1}{x^{1,5}} = \frac{x^3+x^{1,5}}{x^3+3x+1} = \frac{1+\frac{1}{x^{1,5}}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x\to\infty} 1.$$

Näin ollen integraalilla $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1,5}}\,dx$ on samanlainen suppenemiskäyttäytyminen kuin tehtävän toisella integraalilla, joka siis suppenee (x:n potenssi $1,5$ nimittäjässä on riittävän suuri).

6. Selvitä suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Mikäli integraali suppenee, määritä sen arvo. Vihje: Suppenemisen selvittämiseksi voi esittää integrandin nimittäjässä olevan lausekkeen muodossa $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ ja miettiä kumpi tulon tekijöistä aiheuttaa epäoleellisuuden kun $x \to 1$. Voi käyttää luentomonisteen huomautusta 29. Lisävihjeenä esimerkki luennolla 16.10 (12/18).

Mallivastaus:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}},$$

ja tekijä $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ei aiheuta epäoleellisuutta ylärajalla, vaan se johtuu tekijästä $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. Koska $\frac{1}{2} < 1$, II lajin epäoleellinen integraali suppenee.

Integraalin arvo voidaan selvittää sijoituksella $x = \sin t$, jolloin $dx = \cos t\,dt$ ja rajoiksi saadaan 0 ja $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

7. Suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}\,dx$$

ja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}\,dx.$$

Vihje: Vertaa sopivaan integraaliin.

Mallivastaus: Vertaamalla tehtävän 4 integraaleihin voidaan todeta, että ensimmäinen sarja hajaantuu ja jälkimmäinen suppenee.

Huomautus: Ilman integraalilaskennan tukea osasummille

$$\sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n\ln n} \qquad \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n\ln^2 n}$$

olisi hyvin työlästä löytää sellaista lauseketta, josta selviäisi miten osasummat käyttäytyvät, kun $M \to \infty$. Sen sijaan vastaaville integraaleille lauseke voidaan löytää suhteellisen vähäisellä työllä, kuten nähtiin tehtävässä 4.

Tämä on yksi integraalilaskennan suomista eduista: Vaikeasti määritettäville summille voidaan löytää approksimaatioita Newtonin-Leibnizin kaavaa hyödyntämällä.

8. Selvitä suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \Big(\frac{1}{3}\Big)^n$$

Vihje: vertaa sarjan peräkkäisiä termejä ja selvitä onko niiden osamäärä $\leq c < 1$, kun n on kyllin suuri.

Mallivastaus: Peräkkäisten termien suhde on

$$\frac{(n+1)^3 \frac{1}{3^{n+1}}}{n^3 \frac{1}{3^n}} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^3 \frac{1}{3}.$$

Kun $n \to \infty$, tulee $\frac{n+1}{n} \frac{1}{3}$ miten tahansa lähelle lukua $\frac{1}{3}$. Jos esimerkiksi $n > 10$, on $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{10}$. Tällöin $(\frac{n+1}{n})^3 \frac{1}{3} < (\frac{11}{10})^3 \frac{1}{3} = \frac{1331}{3000} < 1$, joten siis peräkkäisten termien suhde on pienempi kuin $\frac{1331}{3000} < 1$, kun $n > 10$. Näin ollen sarja suppenee.

9. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \Big(\frac{1}{7}\Big)^n$$

summa. Ohje: Aloita tunnetusta sarjasta (geometrinen)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ja derivoi molemmat puolet, oikea puoli termeittäin. Kerro x:llä puolittain ja sijoita lopuksi x:n paikalle sopiva luku.

Mallivastaus: Laskemalla derivaatat puolittain saadaan

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

ja tämä x:llä kertomalla saadaan

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Sijoittamalla $x = \frac{1}{7}$ saadaan

$$\frac{7}{36} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{7}\right)^n.$$