Mika Hirvensalo

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Sisällys

Luku 1
Johdanto

Insinöörimatematiikan opintokokonaisuuden tarkoitus on esittää perustiedot valikoiduista matematiikan työkaluista, joita sovelletaan teknisillä aloilla. Tässä osassa käsitellään differentiaali- ja integraalilaskentaa.

Pohjatiedoiksi tälle kurssille tarvitaan periaatteessa lukiokurssien laajan matematiikan tuntemus tai halukkuus opiskella vastaavat asiat itsenäisesti. Käytännössä opiskelija pystyy omaksumaan tämän kurssin asiat myös lukion lyhyen matematiikan pohjalta, mutta tämä vaatii huomattavasti enemmän henkilökohtaista työpanosta. Tukena toimii kurssi Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot. Osallistujien otaksutaan hallitsevan ainakin alkeellisen joukko-opin, itseisarvon käsitteen, tavanomaiset polynomit, juurenoton, murtolausekkeet, potenssi- ja eksponenttimerkinnät, algebrallisten lausekkeiden käsittely- ja sievennyssäännöt, perusmenetelmiä yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseksi, trigonometristen (sin, cos, tan), eksponentti- ja logaritmifunktioiden (e^x, $\ln x$) perusominaisuudet sillä tasolla kun niitä lukiomatematiikassa esitetään.

1.1 Differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksestä

Matematiikan historian tutkimus on osoittanut, että jo muinaiset kreikkalaiset, tai ainakin yksi heistä, Arkhimedes, tunsi integraalilaskennan suunnilleen kahdeksantoista vuosisataa ennen Newtonia ja Leibnitziä. Erityisen huomionarvoista nykyaikaisesta näkökulmasta on se, että Arkhimedeen antiikkinen integraalilaskenta oli loogisilta perusteiltaan huomattavasti johdonmukaisempi kuin uutta aikaa edustaneiden Newtonin ja Leibnitzin esitykset. Arkhimedes kykeni kehittämänsä integraalilaskennan perusteella määrittämään pinta-aloja ja tilavuuksia jotka olivat aiemmin olleet tavoittamattomissa. On hyvinkin mahdollista, että jotkut Arkhimedeen tieteellisistä saavutuksista eivät ole säilynyt nykypäivään asti, mutta säilyneidenkin töiden perusteella Arkhimedes oli selvästi antiikin ajan merkittävin ja yksi kaikkien aikojen merkittävimmistä matematiikan ja tekniikan kehittäjistä.

Vaikka Arkhimedes olikin todellinen uranuurtaja, on matematiikka hänekin aikojensa jälkeen kehittynyt huomattavasti. Arkhimedeen tapa laskea integraaleja oli varsin työläs ja parempi menetelmä saatiin vasta uudella ajalla differentiaalilaskennan myötä. Miksi Arkhimedes, liki kaksi vuosituhatta aikalaisiaan edellä oleva matemaatikko ei kehittänyt myös differentiaalilaskentaa, jota Newton ja Leibnitz käyttivät aisaparina integraalilaskennalle? Newtonin ja Leibnizin löytämät kytkökset differentiaali- ja integraalilaskennan välillä nimittäin osoittautuivat historialliseksi läpimurroksi integraalilaskennan ja sitä myötä luonnontieteiden kehitykselle.

Vastaus jäänee ikuisiksi ajoiksi lähestulkoon spekulaation varaan, mutta yksi tärkeä syy lienee, että Arkhimedeen kulttuuripiirissä matematiikka perustui hyvin suurelta osin geometristen käsitteiden varaan, ja täten negatiivisten suureiden käsite oli tuntematon. Differentiaalilaskenta edellyttää yhtä lailla negatiivisten kuin positiivistenkin suureiden hallintaa, ja ehkäpä tätä psykologista kynnystä ei edes Arkhimedeen kaltainen mestari kyennyt murtamaan.

Lisäksi on syytä huomauttaa, että differentiaalilaskentaa edelsi, ja voisi lähestulkoon sanoa edellytti, René Descartesin uraauurtava algebraa ja geometriaa yhdistävä työ. Muita mainitsemisen arvoisia uuden ajan matematiikan pioneereja olivat Blaise Pascal ja Pierre Fermat. Integraali-ja differentiaalilaskenta yhdessä muodostavat matemaattisen koneiston, jolla voidaan hyvin tehokkaasti kuvata luonnontieteissä, erityisesti fysiikassa esiintyviä ilmiöitä. Jos tämän koneiston oleellisimmat piirteet pitäisi esittää erittäin tiiviisti, voisi sanoa että integraalilaskenta sallii suureen käsittelemisen pistemäisissä osissa ja näiden osien yhdistämisen, kun taas differentiaalilaskenta sallii suureen ja sen muutoksen samanaikaisen käsittelyn.

Kokonaisuutena differentiaali- ja integraalilaskenta muodostui 1600-luvun jälkipuoliskolla Newtonin ja Leibnizin töiden myötä. Newtonin motivaatio uudenlaisen matematiikan kehittämiseen lähti tarpeesta kuvailla reaalimaailman ilmiöitä kuten taivaanmekaniikkaa ja esittää täsmällisesti mekaniikassa tärkeää käsitettä *suureen muutosnopeus*. Leibniz ei teoriaansa muodostaessaan korostanut fysikaalista lähtökohtaa. Leibnizin käyttämiä merkintöjä pidetään yleisesti selkeämpinä kuin Newtonin, mutta myös Newtonin merkintöjä käytetään edelleen jossain määrin fysiikassa.

Huolimatta erilaisista filosofisista lähtökohdista Newtonin ja Leibnizin työt johtivat samanlaisiin matemaattisiin käsitteisiin ja näiden myötä samanlaiseen teoriaan. Jälkikäteen arvioiden voidaan todeta, että kummankaan versio differentiaali- ja integraalilaskennasta ei täytä nykypäivän vaatimuksia loogisesti aukottomasta matemaattisesta teoriasta. Tämä johtuu siitä, että 1600-luvun lopulla *reaaliluvun* käsite ei ollut nykyisellä tavalla jäsentynyt – koko asiaa ei ollut ollut tarpeen pohtia antiikin aikojen jälkeen. Newtonin ja Leibnizin aikoina puhuttiin ”äärettömän pienistä” suureista, ns. *infinitesimaaleista*, joiden avulla perusteltiin sekä differentiaali- että integraalilaskennan tuloksia. Tällä lähestymistavalla saavutettiin merkittäviä tuloksia, mutta sen looginen hataruus havaittiin jo varhain: Reaalilukujen joukossa ei ole infinitesimaaleja, joihin Newtonin ja Leibnizin aikainen differentiaali- ja integraalilaskenta perustuu. Newton ja Leibniz siis perustivat työnsä käsitteille, joista ei edes senaikuisen tietämyksen mukaan voitu puhua täsmällisesti. Loogisesti tyydyttävä teoria differentiaali- ja integraalilaskennasta saatiin vasta 1800-luvulla Cauchyn ja Weierstrassin töiden myötä.

On kuitenkin korostettava, että Newtonin ja Leibnizin ja heidän aikalaistensa tapa lähestyä differentiaali- ja integraalilaskentaa infinitesimaalien avulla on melko intuitiivinen ja helposti ymmärrettävä. Lisäksi infinitesimaaleja käyttävän lähestymistavan kautta on saatu merkittäviä tuloksia, jotka on myöhemmin voitu täsmällisemmän lähestymistavan puitteissa osoittaa oikeiksi. Siksi on mahdollista ajatella, että epätäsmällisen, infinitesimaaleihin tukeutuvan idean takana olisi jokin loogisesti täsmällinen lähestymistapa ja tällainen löydettiinkin 1960-luvulla. Luomalla ns. *epästandardin analyysin* Abraham Robinson osoitti, miten infinitesimaaleja voidaan käsitellä loogisesti tyydyttävällä tavalla. Robinsonin tekniikka vaatii kuitenkin huomattavasti vankemman matemaattisen pohjan kuin Weierstrassin 1800-lukulainen ε–δ -tekniikka, eikä Robinsonin lähestymistapaa siksi käytetä yleensä. Myös tämän kurssin käsitteet esitetään Weierstrassin tavalla.

Logiikan näkökulmasta katsoen differentiaalilaskennan kehittämiseksi tarvitsee määritellä ainoastaan yksi uusi käsite, nimittäin raja-arvo. Myös integraalilaskenta sellaisessa muodossa kuin tätä kurssikokonaisuutta varten tarvitaan, olisi mahdollista rakentaa tämän raja-arvokäsitteen päälle, mutta integraalien ominaisuuksia on helpompi ymmärtää kun käytetään hieman toisenlaista raja-arvokäsitettä.

Luku 2
Raja-arvo ja jatkuvuus

2.1 Raja-arvo

Jos reaalifunktio f on määritelty jollakin välillä $[a,b]$ pistettä $x_0 \in [a,b]$ lukuunottamatta, voidaan kuitenkin tarkastella miten f:n arvot käyttäytyvät luvun x_0 lähellä. Jos $f(x)$ käyttäytyy siten, että sen arvot ”tarkkenevat” kohti lukua y kun x ”tarkkenee” kohti lukua x_0, sanotaan, että f:llä on raja-arvo y pisteessä x_0.

Differentiaalilaskenta voidaan varsin yksiselitteisesti rakentaa raja-arvon käsitteen pohjalle. Käsitteen raja-arvo nykyaikaisena perustana puolestaan toimii reaalilukujen ja -funktioiden etäisyyksien arviointi. Monia arviointien perustana toimii *kolmioepäyhtälö*.

Ennen seuraavaa määritelmää muistutetaan, että $\mathbb{R}$:n alkioita (reaalilukuja), kutsutaan myös *pisteiksi*. Myös useampiulotteisten rakenteiden (vektoriavaruuksien) $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan pisteiksi; nimityksen taustalla on geometrinen esitys. Usein myös minkä hyvänsä joukon alkiota kutsutaan pisteeksi analogiaan nojautuen.

Määritelmä 1. Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *avoin ympäristö* on avoin väli (a,b), joka sisältää pisteen x_0.

Ellei toisin mainita, pisteen ympäristöllä tarkoitetaan aina avointa ympäristöä. Intuitiivisesti annetun reaalifunktion $f(x)$ *raja-arvolla* (limes) pisteessä x_0 tarkoitetaan sellaista lukua y, jota funktion $f(x)$ arvo lähestyy, kun x lähestyy lukua x_0.

Tämä voidaan tarkemmin ilmaista siten, että $d(f(x),y$ tulee pieneksi, kunhan x valitaan siten, että $d(x,x_0)$ on pieni. Lisäksi on voitava ilmaista se, että $d(f(x),y)$ voidaan saada *miten pieneksi tahansa* (esim. pienemmäksi kuin mikä hyvänsä ennalta annettu $\varepsilon > 0$) , kunhan $d(x,x_0)$ in riitävän pieni (pienempi kuin δ_ε) ja tämä puolestaan johtaa seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 2 (Raja-arvo). Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_\varepsilon > 0)(0 < d(x,x_0) < \delta_\varepsilon \to d(f(x),y) < \varepsilon).$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Raja-arvo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} y$.

Taustatietoa

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) oli ranskalainen matematiikko, joka saavutti merkittäviä tuloksia muun muuassa kompleksifunktioiden integraalilaskennan alalla. Cauchy aloitti analyysin modernisoinnin esittämällä erikoistapauksissa nykyisen kaltaisen raja-arvon määritelmän.

(kuva: Wikimedia Commons)

Taustatietoa

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Weierstraß) (1815–1897) oli saksalainen matemaatikko, joka modernisoi differentiaali- ja integraalilaskennan nykyiseen asuunsa. Muun muuassa nykyisin käytetyt eksaktit raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan käsitteet ovat häneltä peräisin. Ennen Weierstrassin töitä mainitut käsitteet oli yleisesti perustettu enemmän intuitiiviselle pohjalle.

(kuva: Wikimedia Commons)

Raja-arvon määritelmä merkitsee siis sitä, että reaalifunktion f raja-arvo pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$, jos valitsemalla x riittävän pienestä x_0:n ympäristöstä (niin pienestä että $d(x,x_0) < \delta$) funktion f arvo saadaan miten pieneen pisteen y ympäristöön tahansa (siis $d(f(x),y)$ pienemmäksi kuin mikä hyvänsä positiiviluku ε).

Jos halutaan funktion f arvo aina vain y:n pienempään ympäristöön, on yleensä x valittava aina vain pienemmästä x_0:n ympäristöstä, mikä merkitsee siis sitä, että luku $\delta = \delta_\varepsilon$ yleensä riippuu luvusta ε. Sen lisäksi on huomattava, että δ riippuu yleensä myös pisteestä x_0.

Huomautus 1. Raja-arvon määritelmässä x toteuttaa ehdon $0 < d(x,x_0) < \delta$. Tällöin siis aina $d(x,x_0) \neq 0$, joten $x \neq x_0$. Tästä seuraa, että *raja-arvo* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$ *ei riipu arvosta* $f(x_0)$, *vaan arvoista* $f(x)$, *missä* $x \neq x_0$ *on pisteen* x_0 *ympäristössä.* On myös huomioitava, että raja-arvoa pisteessä x_0 ei voida määritellä laisinkaan, ellei f on määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä (x_0 mahdollisesti poislukien).

Huomautus 2. Koska $f(x)$ ei voi samanaikaisesti olla mielivaltaisen lähellä kahta eri lukua y_1 ja y_2, on raja-arvo (mikäli olemassa) välttämättä yksikäsitteinen. Muodollisesti päättely voidaan tehdä vaikkapa seuraavasti: Tehdään vastaoletus, jonka mukaan funktiolla f on pisteessä x_0 kaksi eri raja-arvoa y_1 ja y_2. Merkitään $\varepsilon = \frac{1}{2}d(y_1,y_2) > 0$. Koska y_1 on raja-arvo, on $d(f(x),y_1) < \varepsilon$, kunhan $d(x,x_0) < \delta_\varepsilon$. Samanaikaisesti myös $d(f(x),y_2) < \varepsilon$. Tämä ei kuitenkaan voi pitää paikkansa, sillä tällöin olisi kolmioepäyhtälön mukaan

$$\varepsilon = \frac{1}{2}d(y_1,y_2) \le \frac{1}{2}(d(y_1,f(x))+d(f(x),y_1)) < \frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon) = \varepsilon,$$

mikä on ristiriita ($\varepsilon < \varepsilon$).

Esimerkki 1. $\lim_{x\to 2}(3x+1) = 7$, mikä voidaan muodollisesti todistaa oikeaksi seuraavasti:

$$d(3x+1,7) = |3x+1-7| = |3x-6| = 3\,|x-2| = 3d(x,2).$$

Tällöin siis etäisyys $d(3x+1,7)$ saadaan pienemmäksi kuin ε, kun x valitaan niin läheltä 2:sta, että $d(x,2)$ on pienempi kuin $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Esimerkki 2. Funktio $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$ on määritelty kaikkialla muualla paitsi pisteessä $x = 1$. raja-arvo pisteessä $x = 1$ on 3, mikä nähdään oikeaksi seuraavalla laskelmalla: Koska $2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1)$, voidaan tapauksessa $x \ne 1$ supistaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} d(f(x),3) &= \left|\frac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}-3\right| \\ &= |2x+1-3| = |2x-2| = 2\,|x-1| = 2d(x,1) < \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $d(x,1) < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$. Toisin sanoen, arvo $f(x)$ saadaan miten lähelle kolmosta tahansa, kun x valitaan riittävän läheltä lukua 1 (ei kuitenkaan valita $x = 1$).

Esimerkki 3. $\lim_{x\to 3}(x^2-2x+2) = 5$. Tämä voidaan osoittaa oikeaksi seuraavasti:

$$d(x^2-2x+2,5) = \left|x^2-2x+2-5\right| = \left|x^2-2x-3\right| = |(x+1)(x-3)| = |x+1|\,d(x,3).$$

Jos x on valittu niin läheltä lukua 3, että $d(x,3) < 1$, on tällöin $|x+1| = |x-3+4| \le |x-3|+|4| < 5$ ja siis

$$d(x^2-2x+2,5) < 5d(x,3).$$

Tällöin siis $d(x^2-2x+2,5) < \varepsilon$, kunhan $d(x,3) < \min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\} = \delta$.

Esimerkki 4. $\lim_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x+4}{x-3} = -\dfrac{9}{4}$, mikä osoitetaan oikeaksi seuraavasti:

$$\begin{aligned} d\Big(\frac{3x^2-2x+4}{x-3},-\frac{9}{4}\Big) &= \left|\frac{3x^2-2x+4}{x-3}-\Big(-\frac{9}{4}\Big)\right| = \left|\frac{12x^2+x-11}{4(x-3)}\right| = \left|\frac{(x+1)(12x-11)}{4(x-3)}\right| \\ &= \frac{|12x-11|}{4\,|x-3|}d(x,-1). \end{aligned}$$

Jos nyt x on valittu niin läheltä lukua -1, että $|x+1| = d(x,-1) < 1$, on $|12x-11| = |12x+12-23| \le |12x+12|+|-23| = 12\,|x+1|+23 < 12+23 = 35$ ja $|x-3| = |-4+x+1| \ge |-4|-|x+1| > 4-1 = 3$. Tällöin

$$d\Big(\frac{3x^2-2x+4}{x-3},-\frac{9}{4}\Big) < \frac{35}{4\cdot 3}d(x,-1) = \frac{35}{12}d(x,-1)$$

ja siis $d(\frac{3x^2-2x+4}{x-3},-\frac{9}{4}) < \varepsilon$, kun $d(x,-1) < \min\{\frac{12}{35}\varepsilon,1\} = \delta$.

Huomautus 3. Raja-arvon määritelmä ei yleensä sovellu raja-arvon y löytämiseen, ainoastaan sen todistamiseen, että löydetty luku y on etsitty raja-arvo. Esimerkeissä 1, 2, 3 ja 4 raja-arvot on löydetty käyttämällä mielekkään tuntuista päättelyä: ”x:n ollessa lähellä lukua -1 on lauseke $\frac{3x^2-2x+4}{x-3}$ lähellä lukua $\frac{3\cdot(-1)^2-2(-1)+4}{-1-3} = -\frac{9}{4}$. Tämän päättelyn oikeellisuus perustellaan myöhemmin lauseessa 3.

Esimerkki 5. Funktio $f(x) = \frac{1}{x-2}$ on määritelty kaikkialla muualla paitsi pisteessä $x = 2$. Tässä pisteessä funktiolla ei kuitenkaan ole raja-arvoa, mikä nähdään seuraavasti: Tehdään vastaoletus, jonka mukaan $M = \lim_{x\to 2} f(x)$ olisi olemassa. Tällöin $\left|\frac{1}{x-2} - M\right|$ pitäisi saada pienemmäksi kuin mikä hyvänsä positiiviluku, kunhan x valitaan riittävän läheltä lukua 2. Erityisesti $\left|\frac{1}{x-2} - M\right| < 1$, kun $|x-2|$ on kyllin pieni, sanotaan $|x-2| \le \delta_1$ ja siksi $\left|\frac{1}{x-2} - M\right| < 1$, kun $|x-2| < \min\{\delta_1, \frac{1}{1+|M|}\}$

Kolmioepäyhtälöä ja vastaoletusta käyttämällä

$$\left|\frac{1}{x-2}\right| - |M| \le \left|\frac{1}{x-2} - M\right| < 1,$$

mistä seuraa, että $\left|\frac{1}{x-2}\right| < 1 + |M|$, kun $|x-2|$ on kyllin pieni. Mutta edellisestä epäyhtälöstä seuraa $|x-2| > \frac{1}{1+|M|}$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön $|x-2| < \min\{\delta_1, \frac{1}{1+|M|}\}$ kanssa. Tästä päätellään että vastaoletus on väärä eikä raja-arvoa M ole olemassa.

Osa edellisen esimerkin kaltaisista tapauksista kuuluu seuraavan määritelmän piiriin:

Määritelmä 3. Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta_M)(0 < d(x,x_0) < \delta_M \to f(x) > M).$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön*.

Raja-arvo $-\infty$ määritellään samoin kuin yllä, vaihtamalla epäyhtälö $f(x) > M$ epäyhtälöksi $f(x) < -M$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Vapaammin ilmaistuna funktion raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön, jos valitsemalla x riittävän läheltä pistettä x_0 saadaan funktion f arvo kuinka suureksi hyvänsä. Jätetään harjoitustehtäväksi raja-arvojen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavien symbolien $-\infty$ sisältävien raja-arvojen määrittely.

Huomautus 4. Symbolit ∞ ja $-\infty$ eivät vastaa mitään reaalilukua, vaan niitä käytetään ainoastan apumerkintöinä puhuttaessa "äärettömistä" raja-arvoista, jotka on täsmällisesti määritelty yllä. Erityisesti ei voida määritellä sellaisia summia, tuloja tai osamääriä, joissa symboli ∞ tai $-\infty$ esiintyy.

Esimerkki 6. Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on määritelty aina kun $x \neq 0$. Sillä on pisteessä $x = 0$ raja-arvo ∞, koska $\frac{1}{x^2} > M$ kun $x^2 < \frac{1}{M}$, mikä toteutuu aina, kun $d(x,0) = |x-0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Toisin sanoen, $f(x) > M$, kun x valitaan niin läheltä nollaa, että $d(x,0) < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$.

Esimerkin 5 tapauksessa ei funktiolla pisteessä $x = 2$ kuitenkaan ole ääretöntäkään raja-arvoa, mikä johtuu siitä, että tapauksessa $x > 2$ lauseke $\frac{1}{x-2}$ on positiivinen, kun taas tapauksessa $x < 2$ lauseke $\frac{1}{x-2}$ on negatiivinen. Kummassakin tapauksessa lauseke voi itseisarvoltaan olla kuitenkin miten suuri tahansa.

Määritelmä 4. Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b).

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = y \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)((0 < d(x,x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \to d(f(x),y) < \varepsilon).$$

Tällöin sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$

Oikeanpuoleisen raja-arvon määritelmä poikkeaa siis raja-arvon määritelmästa vain siinä, että pisteen x_0 ympäristössä tarkastellaan vain sellaisia funktion $f(x)$ arvoja, joissa x sijaitsee x_0:sta katsoen oikealle, siis $x > x_0$. Analogisesti määritellään *vasemmanpuoleinen raja-arvo* $\lim_{x\to x_0-} f(x) = y$ ja merkitään $f(x_0-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Esimerkki 7. Osoitetaan, että $f(x) = \frac{1}{x-2}$ oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 2$ on ∞ ja että vasemmanpuoleinen raja-arvo samassa pisteessä on $-\infty$. Valitaan tätä varten positiiviluku M. Oikeanpuoleisen raja-arvon määrittämistä varten tarkastellaan lukuja $x > 2$, jolloin $x-2 = |x-2|$. Tällöin epäyhtälö $\frac{1}{x-2} > M$ pätee tarkalleen silloin, kun

$$x-2 = |x-2| = d(x,2) < \frac{1}{M},$$

joten raja-arvon määritelmässä esiintyväksi luvuksi voidaan valita $\delta_M = \frac{1}{M}$. Näin ollen $\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

Vasemmanpuoleista raja-arvoa oikeaksi osoitettaessa on näytettävä toteen, että lausekkeen $\frac{1}{x-2}$ arvo voidaan saada pienemmäksi kuin mikä hyvänsä luku $-M$, missä M on kuinka suuri positiiviluku hyvänsä, kunhan x valitaan riittävän läheltä lukua 2, siten, että $x < 2$. Oletetaan siis, että $x < 2$, jolloin $d(x,2) = |x-2| = 2-x$ ja epäyhtälö $\frac{1}{x-2} < -M$ on yhtäpitävä epäyhtälön $-(x-2) < \frac{1}{M}$ kanssa, mikä puolestaan voidaan kirjoittaa muotoon $d(x,2) < \frac{1}{M}$. Lauseke $\frac{1}{x-2}$ tulee siis pienemmäksi kuin $-M$, jos $x < 2$ valitaan siten, että $d(x,2) < \frac{1}{M}$.

Tarkastellaan seuraavaksi raja-arvojen laskusääntöjä.

Määritelmä 5. Funktio f on *rajoitettu* joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M, että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$.

Lause 1. *Jos funktiolla f on äärellinen raja-arvo A pisteessä x_0, siis $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, niin silloin funktio f on rajoitettu jossakin pisteen x_0 ympäristössä.*

Todistus. Raja-arvon määritelmän mukaan $d(f(x),A)$ saadaan miten pieneksi tahansa, kunhan x valitaan riittävän läheltä x_0:aa. Erityisesti etäisyys $d(f(x),A) < 1$, kun $d(x,x_0) < \delta_1$. Jos siis $d(x,x_0) < \delta_1$, on

$$|f(x)-A| = d(f(x),A) \leq 1.$$

Kolmioepäyhtälön mukaan $|f(x)| - |A| \leq |f(x)-A|$, joten siis

$$|f(x)| - |A| \leq |f(x)-A| < 1,$$

kunhan $d(x,x_0) < \delta_1$. Näin ollen

$$|f(x)| < |A| + 1$$

kun x_0 on x:n sellaisessa ympäristössä, että $d(x,x_0) < \delta_1$. □

Lause 2. *Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, on olemassa sellainen x_0:n ympäristö I, että $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ aina kun $x \in I$.*

Todistus. Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x)-A| < \frac{A}{2}$ aina, kun $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Nyt väli $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ voidaan valita kysytyksi ympäristöksi, sillä

$$|f(x)-A| < \frac{A}{2} \Rightarrow -\frac{A}{2} < f(x)-A < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2}.$$

□

Lause 3. *Olkoon* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:*

1. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.
2. $\lim_{x\to x_0} cf(x) = cA$.
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = A+B$.
4. $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
5. *Jos* $B \neq 0$, *niin* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
6. *Jos* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$ *ja* $\lim_{x\to y} g(x) = z$, *niin* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z$.

Todistetaan näistä esimerkin vuoksi 4 ja jätetään loput harjoitustehtäviksi.

Todistus.

$$\begin{aligned} &d(f(x)g(x),AB) = |f(x)g(x)-AB| = |f(x)g(x)-Bf(x)+Bf(x)-AB| \\ &\leq |f(x)g(x)-Bf(x)|+|Bf(x)-AB| = |f(x)|\,|g(x)-B|+|B|\,|f(x)-A| \\ &= |f(x)|\,d(g(x),B)+|B|\,d(f(x),A). \end{aligned}$$

Koska $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, tulee $d(f(x),A)$ miten pieneksi tahansa, kunhan x valitaan kyllin läheltä x_0:aa, erityisesti $d(f(x),A) < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ kun $d(x,x_0) < \delta_{\varepsilon,B}$, joten jälkimmäinen yhteenlaskettava saadaan miten pieneksi hyvänsä valitsemalla x riittävän läheltä x_0:aa. Edellisen lauseen mukaan $|f(x)| < |A|+1$, kunhan $d(x,x_0) < \delta_1$.

Koska $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, tulee $d(g(x),B)$ miten pieneksi tahansa, kunhan x valitaan kyllin läheltä x_0:aa, erityisesti $d(g(x),B) < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ kun $d(x,x_0) < \delta_{\varepsilon,A}$. Jos siis $d(x,x_0) < \delta = \min\{\delta_{\varepsilon,B}, \delta_1, \delta_{\varepsilon,A}\}$, niin

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x),AB) &\leq |f(x)|\,d(g(x),B)+|B|\,d(f(x),A) \\ &< (|A|+1)\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}+|B|\frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Edellinen lause perustelee sen, että rationaalifunktioiden raja-arvo on sama kuin funktion arvo sellaisissa pisteissä, missä nimittäjä ei tule nollaksi. Äärettömien raja-arvojen kohdalla ei välttämättä saada yleisiä laskusääntöjä.

Esimerkki 8. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$, mutta raja-arvoa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot x = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ei ole olemassa, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot x^2 = \lim_{x\to 0} 1 = 1$ ja $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} x^3 = \lim_{x\to 0} x = 0$.

Esimerkki 9. Selvitetään lausekkeen $\frac{\sin x}{x}$ käyttäytyminen, kun x lähestyy nollaa. Kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on geometrisen kuvion (piirrä) perusteella $\frac{1}{2}\sin x\cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$, mistä $\frac{1}{2}\sin x$:llä jakamalla saadaan $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ja edelleen $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$. Aiemmin on todettu että kosini on kutistava funktio, siis $d(\cos x, 1) \leq d(x,0)$. Käyttämällä lisäksi Lausetta 3 voidaan päätellä että

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{lähestyy lukua 1 kun } x \text{ lähestyy nollaa}$$

Käsittelemättä jäivät vielä arvot $x < 0$, mutta koska $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, nämä eivät muuta edellistä johtopäätöstä.

Matlabiin on ohjelmoitu työkaluja myös raja-arvojen määrittämiseen. Tällöin tulee huolehtia siitä, että symbolisen laskennan paketti on asennettu ja että tarvittavat symbolit määritellään *syms*-komennolla

```
>> syms x
>> limit(sin(x)/x,x,0)

ans =

1
```

`limit`-komennossa ensimmäinen paikka on varattu funktiolle, toinen muuttujalle joka lähestyy kolmannessa paikassa ilmaistua arvoa. Raja-arvot äärettömyydessä ja toispuoleiset raja-arvot lasketaan seuraavien esimerkkien mukaan.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{e^x}:$$

```
>> limit(x^100/exp(x),x,inf)

ans =

0

>>
```

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2}:$$

```
>> limit(1/(x-2),x,2,'left')

ans =

-inf

>>
```

2.2 Jatkuvuus

Määritelmän mukaan funktion raja-arvo pisteessä x_0 ei riipu millään tavoin funktion arvosta tässä pisteessä, vaan määräytyy funktion arvoista pisteen x_0 ympäristössä. Aiemmin kuitenkin jo nähtiin, että esimerkiksi rationaalifunktioiden raja-arvo on sama kuin funktion arvo tarkastelupisteessä, mikäli funktio on kyseisessä pisteessä määritelty. Yleisesti funktiota sanotaan *jatkuvaksi* pisteessä x_0, mikäli sen raja-arvo yhtyy funktion arvoon.

Määritelmä 6. Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0, jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Raja-arvon määritelmän mukaan funktion jatkuvuus pistessä x_0 voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon: Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos jokaista positiivilukua ε kohti on olemassa sellainen positiiviluku $\delta = \delta_\varepsilon$, että

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ kun } d(x, x_0) < \delta.$$

Reaalifunktion jatkuvuus pisteessä x_0 pitää siis sisällään seuraavat asiat: 1) funktion tulee olla määritelty pisteessä x_0 ja jossakin sen ympäristössä ja 2) funktiolla tulee olla raja-arvo pisteessä x_0 ja 3) raja-arvon pisteessä x_0 tulee yhtyä funktion arvoon tässä pisteessä. Näin ollen jatkuvuus pisteessä x_0 merkitsee intuitiivisesti ajatellen sitä, että arvo $f(x)$ tulee miten lähelle tahansa arvoa $f(x_0)$, kun vain x valitaan kyllin läheltä x_0:aa.

Esimerkki 10. Määritellään reaalifunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{jos } x \neq 2 \\ 0, & \text{jos } x = 2. \end{cases}$$

Näin määriteltynä f on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty reaalifunktio, mutta kuten esimerkissä 5 nähtiin, ei funktiolla f ole raja-arvoa pisteessä $x = 2$. Täten funktio f ei myöskään voi olla jatkuva pisteessä $x = 2$, eikä tilanne muutu miksikään, vaikka f määriteltäisiin toisin pisteessä $x = 2$.

Esimerkki 11. Palataan esimerkin 2 funktioon ja laajennetaan sen määritelmää asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

Näin saatu funktio on jatkuva pisteessä $x = 1$, sillä $\lim_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$. Itse asiassa sama funktio olisi saatu määrittelemällä $f(x) = 2x + 1$, mistä voidaan todeta että f on jatkuva kaikissa muissakin pisteissä.

Määritelmä 7. Funktio f on *jatkuva välillä* I, jos f on jatkuva jokaisessa I:n pisteessä.

Esimerkki 12. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Funktio f ei ole jatkuva *missään* pisteessä x_0, sillä jos $x_0 \in \mathbb{Q}$, on $f(x_0) = 1$ ja $d(f(x_0), f(x)) = 1$ aina, kun $x \notin \mathbb{Q}$, ja tällaisia pisteitä x löytyy miten läheltä pistettä x_0 hyvänsä. Siis edes $d(f(x_0), f(x)) < 1$ ei voi toteutua, vaikka $d(x_0, x)$ olisi miten pieni hyvänsä. Samoin todetaan, että f ei voi olla jatkuva missään pisteessä $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Tunnetusti esimerkiksi polynomifunktiot ovat jatkuvia koko $\mathbb{R}$:ssä. Jatkuvista funktioista saadaan uusia jatkuvia funktioita esimerkiksi rationaalisin operaatioin.

Lause 4. *Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I. Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.*

Todistus. Seuraa lauseesta 3. □

Itse asiassa voimassa on myös huomattavasti laajempikin tulos (jonka todistus myös sivuutetaan).

Lause 5. *Kaikki alkeisfunktiot (katso määritelmä kurssilta Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot) ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.*

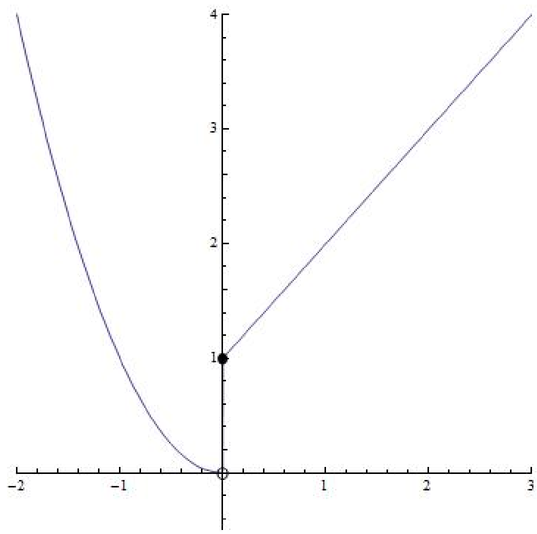
Analogisesti toispuoleisten raja-arvojen kanssa voidaan määritellä *toispuoleinen jatkuvuus*

Määritelmä 8. Olkoon f määritelty jollakin välillä $[x_0, b)$ ja $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f *on oikealta jatkuva pisteessä* x_0.

Määritelmä 9. Olkoon f määritelty jollakin välillä $(a, x_0]$ ja $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f *on vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0.

Esimerkki 13. Määritellään f paloittain seuraavasti (kuva 9):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0, \\ x+1, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$



Kuva 2.1 $f(0) = 1$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$. Funktio f on siis pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva mutta vasemmalta epäjatkuva.

Tällöin $f(0) = 1$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$, joten funktio f on pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva mutta vasemmalta epäjatkuva.

Matlabissa voidaan itse määritellyt funktiot kirjoittaa ns. M-tiedostoiksi (valikoista file → new → M-file). Esimerkin 13 funktio (kutsutaan sitä nimellä `esim`) voidaan määritellä seuraavasti:

```
function y = esim(x)
% ESIM on paloittain määritelty funktio,
% lineaarinen, kun x>0 ja neliöllinen muutoin.
if (x>=0)
     y=x+1
else y=x^2
end;
```

Luku 3
Derivaatta

3.1 Derivaatan määritelmä

Differentiaalilaskennan peruskäsitteisiin kuuluva *derivaatta* voidaan saavuttaa monella tavalla, mutta kaikkein yleispätevin on näkemys, jonka mukaan derivaatta edustaa monimutkaisen, epälineaarisen suureen likimääräistystä eli *approksimaatiota* yksinkertaisemman, lineaarisen avulla. Lineaarisuus tässä yhteydessä viitta ensimmäisen asteen polynomifunktioon. Kun $k \in \mathbb{R}$ on vakio, on muotoa $T(h) = kh$ oleva lineaarinen funktio erittäin yksinkertainen reaalifunktio, ja derivaattakäsite voidaan perustaa tämänkaltaisiin (lokaaleihin) approksimaatiohin.

Approksimaatiota varten tulee kuiten selvittää joitakin yksityiskohtia. Ensinnäkin funktioille $T(h) = kh$ pätee aina $T(0) = 0$, mikä ei tietenkään päde kaikille reaalifunktioille. Lisäksi on selvää, että lineaarinen funktio ei voi approksimoida mitä hyvänsä f funktiota kaikkialla, vaan yleensä on tarpeen kiinnittää jokin tarkastelupiste x, jonka ympärillä funktiota approksimoidaan. Funktiota f tarkasteltaessa on tällöin hyödyllistä valita uusi muuttuja h, jonka suhteen piste x edustaa origoa, siis siirtyä tarkastelemaan pistettä $x+h$. Tämä merkitsee sitä, että funktion $x \mapsto f(x)$ sijaan tarkastellaan funktiota $h \mapsto f(x+h)$. Tästä tulee vielä siirtää pystysuoraa koordinaattia vastaava piste origoon, mikä merkitsee sitä, että tarkasteltavaksi tulee funktio $g(h) = f(x+h) - f(x)$, jolle $g(0) = 0$. Nyt g edustaa alkuperäistä funktiota, mutta uuden muuttujan ja lisäyksen $-f(x)$ ansiosta piste $(x, f(x))$ vastaa siirretyssä koordinaatistossa pistettä $(h, g(h)) = (0,0)$, siis tarkastelu on siirretty origoon ja funktiolle g haetaan lineaarista approksimaatiota.

Esimerkki 14. Olkoon $f(x) = x^3$ ja tarkastellaan tätä funktiota pisteessä $(2, f(2)) = (2,8)$. Siirros origoon merkitsee sitä, että f:n sijaan tarkastellaan funktiota $g(h) = f(2+h) - f(2) = (2+h)^3 - 2^3$.

Määritelmä 10. Pisteen x ympäristössä määritelty reaalifunktio f on *derivoituva* pisteessä x, mikäli on olemassa sellainen $k \in \mathbb{R}$ ja jossain nollan ympäristössä määritelty reaalifunktio $\varepsilon(h)$, että

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

ja funktiolle $\varepsilon(h)$ pätee $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$.

Esimerkki 15. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$ pisteessä $x = 2$. Tällöin

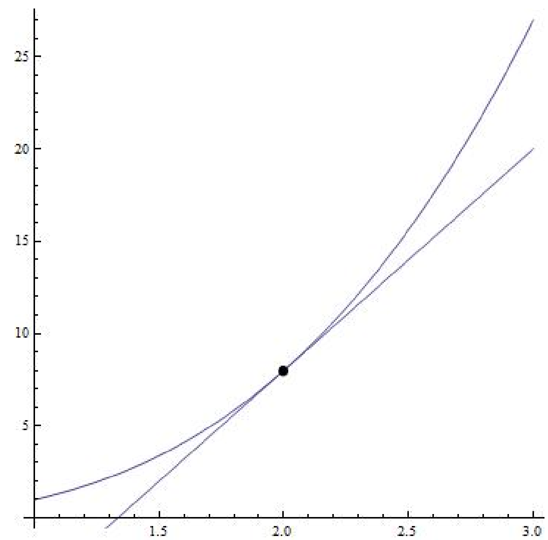
$$f(2+h) - f(2) = (2+h)^3 - 2^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2h^2 + h^3 - 2^3 = 12h + (6h + h^2)h.$$

Kun merkitään $\varepsilon(h) = 6h + h^2$, huomataan, että $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Tällöin funktio $T(h) = 12h$ on etsitty lineaarinen approksimaatio funktiolle $f(2+h) - f(2)$, siis f on derivoituva pisteessä $x = 2$.

Esimerkki 16. Olkoon $f(x) = x^3$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2 h + (3xh + h^2)h = 3x^2 h + \varepsilon(h)h, \end{aligned}$$

missä on merkitty $\varepsilon(h) = 3xh + h^2$. Tällöin $\varepsilon(h)$ toteuttaa derivaatan määritelmän ehdot $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, joten $f(x)$ on derivoituva pisteessä x, ja $f'(x) = 3x^2$.



Kuva 3.1 Funktion $f(x) = x^3$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $x = 2$.

Huomautus 5. Edellisen määritelmän oikealla puolella esiintyvää funktiota $T(h) = kh$ sanotaan funktion $f(x+h) - f(x)$ *lineaariseksi approksimaatioksi* ja kyseessä on siis origon kautta kulkeva suora. Derivaatan käsittäminen lineaarisena approksimaationa avaa keinot derivaattakäsitteen yleistämiseen usean muuttujan funktioille.

Kun $h \neq 0$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \varepsilon(h), \tag{3.1}$$

mistä saadaan välittömästi vaihtoehtoinen muoto derivaatan määritelmälle:

Lause 6. *Pisteen x ympäristössä määritelty reaalifunktio f on derivoituva pisteessä x, mikäli on olemassa sellainen $k \in \mathbb{R}$, että*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k.$$

Huomautus 6. Määritelmä 10 ja Lause 6 ovat matemaattisesti yhtäpitävät ja johtavat täsmälleen samaan derivoituvuuden käsitteeseen. Lause 6 on usein käyttökelpoisempi derivaatan arvon laskemiseksi, mutta Määritelmä 10 on yleistyskelpoisempi, erityisesti kun ryhdytään tarkastelemaan usean muuttujan funktioita kurssikokonaisuuden myöhemmässä osassa.

Huomautus 7. Kun raja-arvo oletetaan tunnetuksi ja perusteiltaan hallituksi käsitteeksi, ei derivaatan käsite periaattessa vaadi mitään uutta perustavaa laatua olevaa matemaattista innovaatiota. Kyse on lähinnä tunnetun rakenteen jäsentelystä ja soveltamisesta. Näin ollen voidaan katsoa, että differentiaalilaskenta voidaan perustaa raja-arvon käsitteen varaan.

Huomautus 8. Derivaatan määritelmän k ja $\varepsilon(h)$ yleensä riippuuvat pisteestä x.

Huomautus 9. Yhtälön 3.1 osamäärää kutsutaan *erotusosamääräksi*.

Määritelmä 11. Jos f on derivoituva pisteessä x, sanotaan määritelmän 10 lukua k funktion f *derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$.

Huomautus 10. Derivaatan määritelmä saatiin tarkastelemalla funktion f mahdollisimman hyvää lineaarista approksimaatiota, joten on selvää, että $f'(x)$ on funktion kuvaajan pisteen $(x, f(x))$ kautta kulkevan sivuavan suoran eli *tangentin* kulmakerroin. Suoran $y = kx$ kulmakerroin k kuvaa suoran kasvunopeutta, joten

derivaattaa $f'(x)$ voidaan pitää funktion f kasvunopeutena pisteessä x.

Lause 7. *Pisteessä x_0 derivoituva funktio on myös jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Suoraan derivaatan määritelmästä seuraa kolmioepäyhtälöä käyttäen, että

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &= |f(x) - f(x_0)| = |k(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)| \\ &\leq |k|\,|x - x_0| + |\varepsilon(x - x_0)|\,|x - x_0| \\ &= (|k| + |\varepsilon(x - x_0)|)d(x, x_0). \end{aligned}$$

Koska $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, on erityisesti $|\varepsilon(x - x_0)| \leq 1$, kun $d(x - x_0) = |x - x_0| \leq \delta_1$. Tällöin siis

$$d(f(x), f(x_0)) \leq (|k| + 1)d(x, x_0) \leq (|k| + 1)\frac{\varepsilon_2}{|k| + 1} = \varepsilon_2,$$

kun $d(x_0, x) \leq \min\{\frac{\varepsilon_2}{|k|+1}, \delta_1\}$. □

Määritelmä 12. Jos f on derivoituva (avoimen) välin I jokaisessa pisteessä, sanotaan, että f on derivoituva välillä I. Funktiota $x \mapsto f'(x)$ sanotaan f:n *derivaattafunktioksi*. Derivaattafunktiosta käytetään myös merkintää $Df(x)$, $D_x f(x)$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{df}{dx}$ ja mikäli merkitään $y = f(x)$, myös merkinnät $\frac{dy}{dx}$ ja y' ovat tavallisia. Jos tuntemattomia on useita ja ainoastaan x:n muutosta tarkastellaan, käytetään osittaisderivaattamerkintää $\frac{\partial f}{\partial x}$

Historialliselta kannalta Leibnitzin merkintä $\frac{dy}{dx}$ ansaitsee erityistä huomiota. Ennen differentiaalilaskennan modernisointia oli tapana ajatella, että dx merkitsee "äärettömän" pientä (infinitesimaalista) lisäystä muuttujaan x ja dy puolestaan "infinitesimaalista" muutosta funktion $y = f(x)$ arvossa. Täten $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ ajateltiin puolestaan "infinitesimaalien" osamääräksi. Nykyisessä (standardimuotoisessa) differentiaalilaskennassa merkintää $\frac{dy}{dx}$ ei tulkita osamääräksi, vaan kyseessä on vain derivaatan merkintätapa.

Esimerkki 17. Merkinnän $\frac{df}{dx}$ ja osittaisderivaattamerkinnän $\frac{\partial f}{\partial x}$ ero on siinä, että muuttujan riippuessa edelleen toisesta muuttujasta ei merkinnässä $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivointia uloteta riippumattomaan muuttujaan. Jos esimerkiksi $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja edelleen $y = 3x^2$, on $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, mutta $\frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 + (3x^2)^2) = \frac{d}{dx}(x^2 + 9x^4) = 2x + 36x^3$.

Esimerkki 18. Olkoon $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ määritelty funktio. Tällöin

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\Big)=-\frac{1}{x(x+h)},$$

kun $h\neq 0$. Lauseen 6 ja raja-arvon laskusääntöjen mukaan tällöin on

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

3.2 Derivointisääntöjä

Tarkalleen ottaen derivaatta merkitsee funktion derivaattaa jossakin pisteessä, mutta melko yleisesti derivaattafunktiota kutsutaan myös derivaataksi. *Derivointi* puolestaan merkitsee derivaattafunktion määrittämistä.

Derivointi suoraan määritelmään perustuen on varsin työlästä, ja siksi kannattaa johtaa derivointisääntöjä joiden avulla derivointi onnistuu systemaattisemmin. Näitä sääntöjä on koottu matematiikan taulukkokirjoihin.

Lause 8 (Vakiofunktion derivaatta). *Jos funktio $f(x)=c$ on vakio välillä I, niin $f'(x)=0$ välillä I.*

Todistus. Lauseen 6 mukaan

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0.\square$$

Lause 9. *Olkoot f ja g avoimella välillä I derivoituvia funktioita ja $a,\, b\in\mathbb{R}$. Silloin välillä I pätee*

- $\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))=af'(x)+bg'(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Todistus. Perustuu suoraan derivaatan määritelmään tai lauseeseen 6 ja raja-arvon laskusääntöihin. Todistetaan esimerkiksi tulon derivointisääntö ja jätetään summaa koskeva sääntö harjoitustehtäväksi.

Suoralla laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ =&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ =&\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h},\end{aligned}$$

mistä raja-arvon laskusäännöt antavat

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\square$$

Lause 10 (Ketjusääntö). *Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g\circ f$ on derivoituva välillä I ja*

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus. Funktion f derivoituvuudesta seuraa, että $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\varepsilon_f(h)$. Kun merkitään $h_1 = f'(x)h + h\varepsilon_f(h)$, saadaan suoralla laskulla

$$\begin{aligned}
&g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(f(x+h) - f(x) + f(x)) - g(f(x)) \\
&= g(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_f(h)) - g(f(x)) = g(f(x) + h_1) - g(f(x)) \\
&= g'(f(x))h_1 + h_1\varepsilon_g(h_1) = g'(f(x))(f'(x)h + h\varepsilon_f(h)) + h_1\varepsilon_g(h_1) \\
&= g'(f(x))f'(x)h + hg'(f(x))\varepsilon_f(h) + h_1\varepsilon_g(h_1).
\end{aligned}$$

Väite seuraa tästä suoraviivaisesti (harjoitustehtävä). □

Huomautus 11. Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, saadaan ketjusäännölle helposti muistettavissa oleva esitys

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki 19. Funktio $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ on kuvausten $x \mapsto f(x)$ ja $x \mapsto \frac{1}{x}$ yhdiste, joten ketjusäännön ja esimerkin 18 perusteella

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x),$$

mikäli $f(x) \neq 0$ tarkasteltavalla välillä.

Lause 11 (Osamäärän derivointi). *Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ derivoituvia välillä I ja lisäksi $g(x) \neq 0$ tällä välillä. Tällöin*

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Todistus. Tulon derivointisäännön ja esimerkin 19 mukaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}(f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\Big(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

□

Lause 12 (Potenssifunktion derivointi). *Olkoon $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin*

$$\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}.$$

Todistus. Jos $k = 0$, on kyseessä vakiofunktio $x^0 = 1$ ja väite pitää paikkansa Lauseen 8 perusteella. Jos $k > 0$, voidaan käyttää Newtonin binomikaavaa, jonka mukaan

$$\begin{aligned}(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \ldots + h^k - x^k \\ &= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \ldots + h^k \\ &= kx^{k-1}h + h\underbrace{\binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \ldots + h^{k-1}}_{\varepsilon(h)}\end{aligned}$$

Ylläolevasta lausekkeesta nähdään, että $\varepsilon(h) \xrightarrow{h\to 0} 0 = \varepsilon(0)$, joten derivaatan arvo on muuttujan h ensimmäisen asteen esiintymän kerroin kx^{k-1}.

Jos $k < 0$, on $-k > 0$ ja tarkasteltava funktio voidaan kirjoittaa muotoon $f(x) = (\frac{1}{x})^{-k}$. Loppu jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Lause 13 (Käänteisfunktion derivointi). *Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I, derivoituva pisteessä x ja että $f'(x) \neq 0$. Tällöin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Todistus. Jätetään todistus funktion f^{-1} derivoituvuuden perustelemisen osalta vajaaksi ja osoitetaan vain että mainittu sääntö on voimassa. Koska $f : I \to \mathbb{R}$ on injektio, on $f : I \to f(I)$ bijektio ja siis käänteisfunktio $f^{-1} : f(I) \to I$ on määritelty. Lisäksi pätee $f^{-1}(f(x)) = x$ aina, kun $x \in I$, joten yhdistetyn funtion derivointisääntöä soveltamalla saadaan

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1.$$

Väite seuraa tästä suoraan kun muistetaan, että $y = f(x)$. $\square$

Huomautus 12. Käänteisfunktion derivaatalle saadaan muistisääntö

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Trigonometristen funktioiden derivointisääntöjä varten tarkastellaan ensin lauseketta

$$\frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x) = \frac{1}{h}\cdot 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2} = \frac{\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h\to 0} \cos x.$$

Viimeisin raja-arvo perustuu kosinifunktion jatkuvuuteen sekä Esimerkkiin 9.

Muille trigonometrisille funktioille derivointisäännöt seuraavat suoraviivaisesti tästä, esimerkiksi käyttämällä identiteettiä $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$. Eksponenttifunktion derivointia varten taas pitää tarkastella lauseketta

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\frac{e^h - 1}{h}.$$

Eksponenttifunktion derivointisääntö seuraa siitä tosiseikasta, että

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1, \tag{3.2}$$

mutta tätä ei voida näyttää toteen tämän kurssin tiedoilla. Yhtälön 3.2 osoittaminen oikeaksi edellyttäisi itse asiassa eksaktia määritelmää luvulle e, eikä tämäkään yleensä olisi helpoin reitti eksponenttifunktion derivointisäännön oikeaksi todistamiseksi.

Seuraavia derivointisääntöjä ei siis tässä yhteydessä todisteta yksityiskohtaisesti:

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

Logaritmin derivointisääntö

- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

puolestaan seuraa eksponenttifunktion ja käänteisfunktion derivointisäännöstä (harjoitustehtävä).

Huomautus 13. Potenssifunktion derivointisääntö $\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ pätee vaikka α ei olisikaan kokonaisluku (harjoitustehtävä)

Esimerkki 20. Lasketaan

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Esimerkki 21. Määritetään

$$\frac{d}{dx}\arctan x.$$

Yhtälöstä

$$\arctan(\tan x) = x$$

saadaan puolittain derivoimalla

$$D\arctan(\tan x)\frac{d}{dx}(\tan x) = 1,$$

josta

$$D\arctan(\tan x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}.$$

Merkitsemällä $y = \tan x$ nähdään, että

$$D\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

3.3 Parametrimuodossa olevan ja implisiittifunktion derivointi

Reaalifunktio voidaan antaa myös parametrimuodossa $f = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$, missä $x, y : I \to \mathbb{R}$ ovat reaalifunktioita. Tämä merkitsee sitä, että $f(x(t)) = y(t)$ välillä I. Jos $x'(t)$ on nollasta eroava välillä I, saadaan yhdistetyn funktion derivointisäännön perusteella

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t),$$

josta $x'(t)$:llä jakamalla saadaan

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Huomautus 14. Parametrimuotoisen funktion derivaatalle saadaan muistisääntö

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Esimerkki 22. Olkoon $f = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$ yksikköympyrän yläpuoliskon parametriesitys. Tällöin $f'(x) = \frac{\frac{d}{dt}\sin t}{\frac{d}{dt}\cos t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{1}{\tan t}$.

Huomautus 15. Ylläolevaan esimerkkiin liittyen voi olla valaisevaa selvittää lauseke $\tan t$:lle x:n avulla, kun tiedetään, että $x = \cos t$.

Tietyt säännöllisyysehdot (ei käsitellä tässä yhteydessä) toteuttava kahden muuttujan funktio $F(x,y)$ määrittelee yhtälön $F(x,y) = 0$ kautta funktion: y voidaan ratkaista x:n avulla: $y = f(x)$ (vaikka varsinaista lauseketta ei aina saataisikaan). Kyse on tällöin implisiittisesti määritellystä funktiosta.

Yhtälön $F(x,y) = 0$ oikea puoli on vakiofunktio, joten sen derivaatta on nolla. Vasenta puolta derivoitaessa on otettava huomioon, että $y = f(x)$ ja käytettävä ketjusääntöä kun derivoidaan y:tä sisältäviä termejä.

Esimerkki 23 (Implisiittimuotoisen funktion derivointi). Yksikköympyrän yhtälö $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelee funktion $y = f(x)$ kun rajoitetaan $x \in [-1, 1]$ ja $y \geq 0$. Kirjoittamalla tämä muotoon $x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$ ja derivoimalla puolittain saadaan

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0,$$

mistä voidaan vielä ratkaista $f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$.

Esimerkki 24. Oletetaan tunnetuksi, että yhtälö

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 3y^4 = 37$$

määrittelee derivoituvan funktion f jossakin pisteen $(1,2)$ ympäristössä. Lasketaan $f'(1)$. Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$3x^2 + 4xy + 2x^2y' - 4y^2 - 8xyy' + 12y^3y' = 0,$$

johon sijoittamalla $(x,y) = (1,2)$ saadaan

$$3 + 8 + 2y' - 16 - 16y' + 96y' = 0 \Leftrightarrow -5 + 82y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{5}{82}.$$

3.4 Useampikertaiset derivaatat

Olkoon f jollakin välillä derivoituva reaalifunktio. Jos myös funktio f' on derivoituva jollakin välillä, voidaan tietysti puhua myös funktion f' derivaattafunktiosta. Tätä kutsutaan funktion f kaksinkertaiseksi derivaattafunktioksi ja merkitään $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ ja $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Jos edelleen f'' on derivoituva, saadaan vastaavasti kolminkertainen derivaatta, jne. Funktion f n-kertaisesta derivaatasta käytetään merkintöjä $D^n_x f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ ja $\frac{d^n y}{dx^n}$

Kaksin- ja useampikertaiset osittaisderivaatat merkitään seuraavasti: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, tai $D^2_x f$, $D_{yx} f$, $D_{xy} f$ ja $D^2_y f$. Osittaisderivoinnin järjestys saattaa toisinaan vaikuttaa derivaatan arvoon. Täten voi olla, että $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Osoittautuu, että riittävän säännöllisille funktioille derivointijärjestys ei kuitenkaan vaikuta useampikertaisten osittaisderivaattojen arvoon.

Esimerkki 25. $D \sin x = \cos x$, $D^2 \sin x = -\sin x$, $D^3 \sin x = -\cos x$ ja $D^4 \sin x = \sin x$.

3.5 Antiderivaatta ja sen määrittäminen

Derivointisääntö $\frac{d}{dx} f(x) = g(x)$, joka esittää f:n derivaattafunktion voidaan lukea myös oikealta vasemmalle, jolloin se esittää g:n *antiderivaatan*.

Määritelmä 13. Funktio $F(x)$ on $f(x)$:n antiderivaatta, jos $F'(x) = f(x)$. Antiderivaattaa kutsutaan myös nimellä *kantafunktio*, *primitiivifunktio* ja *määräämätön integraali*.

Esimerkki 26. Jos $n \geq 1$, niin $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, mistä seuraa että $\frac{d}{dx}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = x^n$ aina, kun $n \geq 0$. Tällöin siis $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ on funktion x^n ($n \geq 0$) antiderivaatta.

Jos C on vakio, ja $F(x)$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta, on $\frac{d}{dx}(F(x)+C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x)+0 = f(x)$, ja siis myös $F(x)+C$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Näin ollen antiderivaatta ei ole yksikäsitteinen, vaan muita antiderivaattoja saadaan lisäämällä vakio johonkin antiderivaattaan. Myöhemmin nähdään, että *kaikki* tietyn funktion antiderivaatat saadaan lisäämällä vakio johonkin antiderivaattaan.

Funktion $f(x)$ antiderivaatoista käytetään merkintää

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

ja tässä merkinnässä funktiota f kutsutaan *integrandiksi*. Merkintää $\int f(x)\,dx$ kutsutaan myös funktion f *määräämättömäksi integraaliksi*, mutta sen suhteen tulee olla huolellinen, sillä se ei viittaa yhteen ainoaan funktioon $F(x)$, vaan joukkoon funktioita $F(x)+C$, missä C on mikä hyvänsä vakio.

Huomautus 16. Olkoon I jokin avoin reaalilukuväli. Välillä I jatkuvien reaalifunktioiden joukkoa merkitään symbolilla $C^0(I)$ ja $C^1(I)$ merkitsee niitä välillä I määriteltyjä reaalifunktioita, jotka ovat derivoituvia ja joiden derivaatta on jatkuva välillä I.

Tällöin derivointi määrittelee funktion $C^1(I) \to C^0(I)$, mutta antiderivaatta relaation $C^0(I) \to C^1(I)$, joka ei ole funktio.

Edellämainituista derivointisäännöistä saadaan helposti seuraavat säännöt, joita kutsutaan *integrointisäännöiksi*

- $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, jos $n \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$

Lisää integrointisääntöjä löytyy matematiikan taulukkokirjoista.

Yleisesti ottaen antiderivaatan eli määräämättömän integraalin löytäminen on hankalampaa kuin derivaattafunktion löytäminen. Derivointisäännöistä seuraa kyllä suoraan muun muuassa se, että

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

ja

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Toisaalta taas ei ole mitään derivointisääntöä, josta suoraan seuraisi muoto esimerkiksi antiderivaatalle

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

Jos funktiosta ei nähdä suoraan, että se on jonkin toisen funktion derivaatta, on antiderivaatan löytämiseksi kuitenkin olemassa kaksi tekniikkaa, joita voidaan soveltaa.

Osittaisintegrointi perustuu tulon derivointisääntöön

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

josta seuraa, että funktion $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ eräs antiderivaatta on $f(x)g(x)$. Tämä toteamus voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x)g(x),$$

mistä yhtälön (3.3) perusteella seuraa, että

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx. \qquad \text{(osittaisintegrointi)}$$

Esimerkki 27. Määritetään $\int \ln x\,dx$ ja tätä varten kirjoitetaan $g(x) = \ln x$, $f(x) = x$, jolloin $f'(x) = 1$ ja siis

$$\int \ln x\,dx = \int \ln x \frac{d}{dx} x = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + C.$$

Esimerkki 28. Määritetään $\int x\sin x\,dx$.

$$\int x\sin x\,dx = \int x\frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Esimerkki 29. Määritetään $\int x^2e^x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2\frac{d}{dx}e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int x\frac{d}{dx}e^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x\,dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

On suositeltavaa tarkistaa antiderivaattojen määritys derivoimalla.

Sijoitus määräämättömään integraaliin perustuu yhdistetyn funktion derivointisääntöön: Merkitään $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, jolloin

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t),$$

mistä saadaan antiderivaattaa koskeva sääntö

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C. \qquad \text{(sijoitus)}$$

Antiderivaatta $\displaystyle\int f(x)\,dx$ voidaan siis laskea suorittamalla sijoitus $x = g(t)$, jolloin dx integraalissa korvataan $g'(t)\,dt$:llä. Tarkoituksena on tietysti valita sellainen sijoitus, että uusi integraali on helpommin laskettavissa kuin alkuperäinen. Lopuksi palataan alkuperäiseen muuttujaan x sijoituksella $t = g^{-1}(x)$. Kysymys siitä, miten sijoitettava funktio pitäisi valita ei ole mitenkään suoraviivainen ratkaistavaksi, eikä mitään yleispätevää sääntöä olekaan. Tärkeimmät sijoitustyypit on kuitenkin lueteltu matematiikan laitoksen kaavakokoelmassa.

Jotta tarvittavat operaatiot olisi mahdollista suorittaa, tulee funktiolle g asettaa joitakin säännöllisyysvaatimuksia, kuten esimerkiksi että g on aidosti monotoninen ja $g'(t)$ jatkuva. Kuitenkaan näihin ehtoihin ei käytännössä tarvitse yleensä kiinnittää huomiota, sillä lopputuloksen voi tarvittaessa tarkistaa derivoimalla.

Esimerkki 30. Määritetään $\displaystyle\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Tehdään sijoitus $x = \sqrt{5}\sin t$, jolloin $\frac{dx}{dt} = \sqrt{5}\cos t$ ja määräämätön integraali saa muodon

$$\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}\cos^3 t}\sqrt{5}\cos t\,dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{5}\tan t + C.$$

Sijoittamalla tähän takaisin alkuperäinen muuttuja saadaan

$$\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C.$$

3.6 Rationaalifunktion antiderivaatta

Palautetaan mieleen, että rationaalifunktiolla tarkoitetaan muotoa $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ olevaa funktiota, jossa $p(x)$ ja $q(x)$ ovat polynomeja. Antiderivaatan

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

määrittäminen derivointisääntöihin perustuen ei ole suoraviivaista, sillä tätä varten pitää löytää derivointisääntöjä, jotka tuottavat tulokseksi osamäärän. Tällaisia ovat mm.

- $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{f(x)^n} = -\dfrac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\ln f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Esimerkki 31. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(2x^2+3x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2+3x-1} + C$

Esimerkki 32. Lasketaan $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$. Tätä varten voidaan kirjoittaa

$$\frac{3x}{x^2+1} = \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1},$$

joten

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Esimerkki 33. Lasketaan

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & \text{jos } n \neq 1 \\ \ln(x-a) + C & \text{jos } n = 1 \end{cases}$$

Esimerkki 34. Lasketaan

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Nimittäjällä ei ole reaalisia nollakohtia, mutta neliöksi täydentämällä saadaan

$$x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4 = 4\Big(\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^2+1\Big).$$

Kun sijoitetaan $t = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow x = 2t+1$, saadaan integraalin arvoksi

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{4(t^2+1)}\cdot 2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.$$

Muita menetelmiä rationaalifunktion antiderivaatan etsimiseksi esitetään kurssin seuraavilla osilla tarpeen mukaan. Ne perustuvat pääsääntöisesti rationaalifunktion pilkkomiseksi sellaisiin osiin, joihin voidaan soveltaa ylläolevia periaatteita.

Luku 4
Differentiaalilaskennan sovelluksia

4.1 Differentiaalilaskennan väliarvolause

Merkittävä osa derivaattafunktion ja alkuperäisen funktion yhteyksistä voidaan johtaa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta, mikä puolestaan seuraa helposti ns. *Rollen lauseesta*

Lause 14 (Rollen lause). *Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b). Jos $f(a) = f(b)$, niin välillä (a,b) on ainakin yksi sellainen piste ξ, jolle pätee $f'(\xi) = 0$.*

Todistus. Jos f on vakiofunktio, kelpaa mikä hyvänsä piste $\xi \in (a,b)$. Jos f ei ole vakio, saa f joko suurempia tai pienempiä (tai molempia) arvoja kuin $f(a) = f(b)$. Tarkastellaan tapausta, jossa f saa suurempia arvoja kuin $f(a)$ (toinen tapaus on samankaltainen ja sen tarkastelu sivuutetaan).

On mahdollista näyttää toteen, että jatkuvalla funktiolla f on suurin arvo M suljetulla välillä $[a,b]$, olkoon ξ jokin sellainen piste, jossa tämä suurin arvo saavutetaan, siis $f(\xi) = M$. Osoitetaan, että $f'(\xi) = 0$. Koska $f(\xi) = M$ on funktion suurin arvo, on $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ aina, kun $|h|$ on niin pieni että $\xi + h \in [a,b]$. Tällaisille h:n arvoille siis pätee

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \begin{cases} \leq 0, \text{ kun } h > 0 \\ \geq 0, \text{ kun } h < 0. \end{cases}$$

Oletuksen mukaan f on derivoituva pisteessä ξ, mikä merkitsee sitä, että raja-arvo

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}$$

on olemassa. Yllä olevista arvioista ja lauseesta 2 seuraa, että raja-arvo $f'(\xi)$ ei voi olla positiivinen eikä negatiivinen, siispä $f'(\xi) = 0$. □

Seuraus 1. *Jos f on välillä $[a,b]$ jatkuva ja derivoituva välillä (a,b) ja $f(a) = f(b)$, niin f:n maksimi- tai minimikohdassa pätee $f'(\xi) = 0$.*

Seuraus 2 (Differentiaalilaskennan väliarvolause). *Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b), niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a,b)$, jossa $f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a)$.*

Todistus. Määritellään apufunktio $g(x) = f(x)(b-a) - (f(b) - f(a))x$ ja huomataan, että g täyttää Rollen lauseen ehdot. Tällöin on olemassa $\xi \in (a,b)$, jolle pätee $g'(\xi) = 0$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon $f'(\xi)(b-a) - (f(b) - f(a)) = 0$. □

Huomautus 17. Differentiaalilaskennan väliarvolause voidaan tulkita seuraavasti: Funktion f muutos välillä $[a,b]$ on $f(b) - f(a)$, ja tämä muutos saadaan välin pituudesta $b - a$ kerrottuna luvulla

$f'(\xi)$. Tällöin siis $f'(\xi)$ on funktion *keskimääräinen* muutosnopeus välillä $[a,b]$. Täten Väliarvolause ilmaisee sen ilmeisen seikan, että ainakin välin $[a,b]$ yhdessä pisteessä funktion kasvunopeus on keskimääräinen.

Seuraus 3 (Integraalilaskennan peruslause). *Jos $f'(x) = 0$ jollakin välillä I, niin f on tällä välillä vakio.*

Todistus. Jos $a \in I$ ja $a < x \in I$, niin väliarvolausetta käyttäen saadaan $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0 \cdot (x-a) = 0$, siis $f(x) = f(a)$. □

Seuraus 4. *Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I (C on vakio).*

Todistus. Oletuksen mukaan apufunktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ välillä I, joten $h(x)$ on vakio, siis $f(x) = g(x) + C$ välillä I. □

Huomautus 18. Jos $F(x)$ ja $G(x)$ ovat funktion f antiderivaattoja välillä I, niin $F'(x) = G'(x) = f(x)$ ja siis $G(x) = F(x) + C$ välillä I.

Seuraus 5. *Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $f'(x) \geq 0$ (vastaavasti $f'(x) \leq 0$) aina kun $x \in (a,b)$, niin f on kasvava (vastaavasti vähenevä) välillä $[a,b]$.*

Edelleen, jos $f'(x) > 0$, (vastaavasti $f'(x) < 0$) kun $x \in (a,b)$, niin f on aidosti *kasvava (vastaavasti vähenevä) välillä $[a,b]$.*

Todistus. Jos $x_1 < x_2 \in [a,b]$, niin väliarvolauseen mukaan $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ jollekin pisteelle $\xi \in (a,b)$. Oletuksen mukaan $f'(\xi) \geq 0$, joten $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, siis $f(x_2) \geq f(x_1)$. Vähenemistä koskeva osa todistetaan samoin. □

Seuraus 6 (Yleistetty väliarvolause). *Olkoot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja derivoituvia välillä (a,b). Tällöin on sellainen piste $\xi \in (a,b)$, että*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus. Käytetään apufunktiota

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)),$$

joka oletusten mukaan on jatkuva välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä (a,b). Suoralla laskulla havaitaan, että $h(a) = h(b)$, joten Rollen lauseen mukaan on sellainen piste ξ, että $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. □

Huomautus 19. Valitsemalla $g(x) = x$ saadaan yleistetystä väliarvolauseesta tavallinen väliarvolause.

Differentiaalilaskennan tehtäviä voi suorittaa **Matlab**-ohjelmistossa symbolisen matematiikan työkalujen avulla. Tällöin tulee `syms`-komennolla luoda tarvittavat muuttujasymbolit.

Esimerkki:

```
>> syms x y
>> f=sin(x*y^2)

f =

sin(x*y^2)

>> diff(f,x)

ans =

cos(x*y^2)*y^2

>>
```

Antiderivaatan etsimistä varten puolestaan on toiminto `int`:

```
>> int(f,x)

ans =

-1/y^2*cos(x*y^2)
```

4.2 l’Hospitalin sääntö

l’Hospitalin sääntö soveltuu toisinaan osamäärän raja-arvon selvittämiseen.

Lause 15 (l’Hospitalin sääntö). *Oletetaan, että* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *ja* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ja että raja-arvo*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistus. Määritellään funktioiden f ja g arvot pisteessä a uudelleen $f(a) = g(a) = 0$, jolloin siis f ja g tulevat jatkuvaksi pisteessä a. Yleistetyn väliarvolauseen mukaan

$$f'(\xi)(g(x) - g(a)) = g'(\xi)(f(x) - f(a)),$$

missä $\xi \in (a,x)$ (tai $\xi \in (x,a)$), mikäli x on valittu riittävän läheltä pistettä a. Tällöin myös yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Jos $x \to a$, niin myös $\xi \to a$, koska $\xi \in (x,a)$ (tai $\xi \in (a,x)$), ja väite seuraa tästä välittömästi. $\square$

Taustatietoa

Guillaume de l'Hospital (l'Hôpital) (1661–1704) oli ranskalainen matematiikan harrastaja. Markiisi de l'Hospital ei kuitenkaan keksinyt nimeään kantavaa sääntöä, vaan julkaisi sen. Säännön keksi tiettävästi kuuluisa sveitsiläinen matemaatikko Johann Bernoulli, joka toimi l'Hospitalin opettajana.

(kuva: Wikimedia Commons)

Esimerkki 35. Määritetään $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$. Nyt $\lim_{x\to 1}\ln x = 0$, $\lim_{x\to 1} x^2-1=0$ ja $D_x \ln x = \frac{1}{x}$, $D_x(x^2-1)=2x$, joten l'Hospitalin sääntö antaa

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 36. Lasketaan raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}.$$

l'Hospitalin sääntö antaa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

4.3 Käyrän tangentti

Derivaatan määritelmä perustuu siihen, että pisteessä x derivoituvan funktion f kuvaaja muistuttaa lokaalisti suoraa sitä enemmän mitä pienemmässä pisteen $(x, f(x))$ ympäristössä kuvaajaa tarkastellaan;

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

Jos merkitään $x = x_0 + h$, saadaan

$$f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0),$$

ja suoraa, $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, jota funktion f kuvaaja siis lokaalisti muistuttaa, nimitetään käyrän $y = f(x)$ *tangentiksi* pisteessä $(x_0, f(x_0))$.

Esimerkki 37. Selvitetään yksikköympyrälle $x^2+y^2=1$ pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö.

Relaation $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$ lähtö- ja maalijoukkoa sopivasti rajoittamalla (esim. $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$) saadaan funktio $y = f(x)$, jonka implisiittimuotoa $x^2 + f(x)^2 = 1$ derivoimalla saadaan $2x + 2f(x)f'(x) = 0$, ja edelleen sijoittamalla $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ saadaan $2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}f'(\frac{1}{2}) = 0$. Tästä yhtälöstä ratkeaa $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö on siis $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sen sijaan yksikköympyrän määräävää relaatiota $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$ ei voida rajoittaa avoimilla väleillä I ja J sillä tavoin, että $1 \in I$, $0 \in J$ *ja* $D = \{(x,y)\in I\times J \mid x^2+y^2=1\}$ olisi funktio. Tämä johtuu siitä, että jos pisteen 1 ympäristö on avoin, on siellä aina pisteitä $x_0 < 1$, joita kohti löytyy kaksi eri arvoa y_0 ja $-y_0$, joille kummallekin pätee $(x_0, y_0) \in D$ ja $(x_0, -y_0) \in D$.

Helposti huomataan kuitenkin, että lähtö- ja maalijoukkoja voidaan rajoittaa siten, että pisteen $(1,0)$ ympäristössä voidaan x esittää y:n funktiona: $x = f(y)$. Tämä vastaa x:n ja y:n roolien vaihtamista keskenään. Tällöin implisiittimuodon $(f(y))^2 + y^2 = 1$ derivointi antaa $2f(y)f'(y) + 2y = 0$, johon sijoittamalla $(x,y) = (1,0)$ saadaan $2 \cdot 1 \cdot f'(0) + 2 \cdot 0 = 0$, josta ratkeaa $f'(0) = 0$. Pisteeseen $(1,0)$ liittyvän tangentin yhtälö on siis $x = 0 \cdot (x-1) + 1$, ts. $x = 1$.

4.4 Funktion kulun tutkiminen

Määritelmä 14. Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Rollen lauseen seurauksena (seuraus 1) saatiin, että ääriarvopisteessä x_0 on välttämättä $f'(x_0) = 0$. Täten siis ääriarvopisteet löytyvät derivaatan nollakohtien joukosta, mutta on huomattava, että kaikki derivaatan nollakohtapisteet eivät välttämättä ole ääriarvopisteitä.

Esimerkki 38. Funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ on $f'(x) = 3x^2$, joten derivaatan ainoa nollakohta on $x = 0$. Kyseinen piste ei kuitenkaan ole ääriarvopiste, sillä miten tahansa läheltä nollaa löytyy pisteitä $a > 0$ ja $-a < 0$, joille $f(a) = a^3 > 0$ ja $f(-a) = -a^3 < 0$.

Määritelmä 15. Jos $f'(x_0) = 0$, mutta x_0 ei ole funktion f ääriarvopiste, sanotaan, että x_0 on *satulapiste*.

Huomautus 20. Voidaan todistaa, että funktion $f(x)$ derivaatan nollakohta x_0 on lokaali maksimi, jos $f''(x_0) < 0$ ja lokaali minimi, jos $f''(x_0) > 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen seurauksena (seuraus 5) saatiin myös tulos, jonka mukaan ehdosta $f'(x) \geq 0$ (vastaavasti $f'(x) > 0$) välillä I seuraa, että funktio $f(x)$ on kasvava (vastaavasti aidosti kasvava) välillä I, ja toisaalta vähenevyys sekä aito vähenevyys seuraavat analogisista ehdoista.

Lisäksi ns. Bolzanon lauseesta[1] seuraa, että jos derivaatta $f'(x)$ on jatkuva funktio, ei se voi vaihtaa merkkiä tulematta välillä nollaksi. Edellä mainittuja tuloksia voidaan käyttää funktion kulun selvittämiseen.

Esimerkki 39. Olkoon $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + 5$ koko reaalilukujen joukossa määritelty funktio. $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x - 12 = 12(x^3 + x^2 - x - 1) = 12(x^2(x+1) - (x+1)) = 12(x^2-1)(x+1) = 12(x+1)^2(x-1)$. Koska derivaattafunktio on myös jatkuva ja sen nollakohdat ovat -1 ja 1, ovat nämä ainoat mahdolliset pisteet, joissa funktion f kasvusuunta muuttuu. Helposti todetaan, että $f'(x) < 0$, kun $x < 1$ ja $f'(x) > 0$, kun $x > 1$, joten funktio f on vähenevä välillä $(-\infty, 1]$ ja kasvava välillä $[1, \infty)$. Lisäksi $x = -1$ on satulapiste.

4.5 Optimointitehtävät

Rollen lauseen seurauksen mukaan derivoituvan funktion lokaaleissa ääriarvokohdissa funktion derivaatta saa arvon nolla. Tämän perusteella voidaan ratkaista joitakin optimointitehtäviä, joissa pyritään löytämään jonkin suureen minimi- tai maksimiarvo annetulla välillä.

Derivaatan nollakohtiin perustuva menettely toimii, mikäli tarkasteltava suure voidaan esittää yhden muuttujan derivoituvana funktiona jollakin suljetulla välillä. Tällöin mahdolliset optimiarvot saavutetaan derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Täten tarkasteltavaksi jää yleensä äärellisen monta mahdollista pistettä, ja näitä vertaamalla voidaan optimointitehtävä ratkaista.

Esimerkki 40. Selvitetään, missä funktio $f(x) = x^2 - 5x + 2$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Todetaan, että $f'(x) = 2x - 5$, jolloin derivaatan ainoa nollakohta on $x = \frac{5}{2}$. Lisäksi todetaan, että $f''(x) = 2 > 0$, joten piste $x = \frac{5}{2}$ on minimipiste. Funktiolla f ei ole muita minimipisteitä, joten kyseinen piste on myös absoluuttinen (globaali) minipiste. Maksimiarvoa funktiolla ei ole, vaan f saa miten suuria arvoja hyvänsä.

[1] Bolzanon lause: Jos jatkuva funktio saa erimerkkiset arvot suljetun välin päätepisteissä, on välillä funktion nollakohta

Esimerkki 41. Selvitetään, miten säilyketölkin (sylinterin muotoinen) mittasuhteet tulee valita, jotta käytettävän materiaalin määrä (tölkin pinta-ala) olisi mahdollisimman pieni kun tilavuudeksi halutaan jokin tietty kiinteä V. Olkoon tölkin pohjan säde r ja korkeus h. Tällöin tölkin pinta-ala koostuu pohjasta ja kannesta $2\pi r^2$ ja lieriön alasta $2\pi rh$. Kokonaispinta-ala on siis $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Tölkin tilavuus V sitä vastoin on pohjan ala kertaa korkeus $V = \pi r^2 h$. Tästä voidaan ratkaista $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Tällöin siis pinta-ala säteen funktiona on

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2,$$

missä ilmeisenä rajoitteena toimii ehto $r > 0$. Lisäksi on ilmeistä, että funktiolla $A(r)$ ei ole maksimia, vaan löydettävä ääriarvokohta on kysytty minimi. Derivointi antaa

$$A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r,$$

joten yhtälö $A'(r) = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2},$$

mikä on yhtäpitävää ehdon $r^3 = \frac{2V}{4\pi}$ kanssa. Tämä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$r^3 = \frac{2\pi r^2 h}{4\pi} = \frac{1}{2} r^2 h,$$

mikä merkitsee sitä, että optimi löytyy arvolla $r = \frac{1}{2}h$.

4.6 Muutoksen arviointi

Huomautus 21. Jos halutaan korostaa nimenomaan, että kyseessä on muuttujan x muutos, käytetään merkinnän $x + h$ sijaan merkintää $x + \Delta x$, missä $\Delta x = h$ edustaa x:n muutosta.

Muuttujan vaihtuessa arvosta x arvoon $x + \Delta x$ vaihtuu myös funktion arvo $y = f(x)$:stä $f(x + \Delta x)$:ään. Yleensä merkitään $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, mikä vastaa hyvin merkintää $\Delta x = (x+\Delta x) - x$, mutta funktion arvon muutosta Δy saattaa olla vaikea esittää tarkasti Δx:n avulla.

Koska derivaatta on lähtökohtaisesti funktion lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h,$$

voidaan muutosta Δf sen sijaan approksimoida muutoksen Δx avulla: Sijoittamalla yllä $h = \Delta x$ saadaan

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

missä approksimaatio on sitä tarkempi mitä pienempi Δx on.

Esimerkki 42. Pallon sädettä kasvatetaan prosentin verran. Arvioidaan, kuinka paljon tällöin pallon tilavuus kasvaa. Koska r-säteisen pallon tilavuus on $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, saadaan $V'(r) = 4\pi r^2$ ja siis

$$\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r) \approx V'(r)\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$$

ja siis tilavuuden prosentuaalisen kasvun likiarvo saadaan osamäärästä

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{\Delta r}{r}.$$

Säteen kasvu prosentin verran merkitsee sitä, että $\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{100}$, jolloin siis tilavuuden prosentuaalinen kasvu on likimain $3 \cdot \frac{1}{100}$, siis noin kolmen prosentin luokkaa.

4.7 Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Yhden muuttujan *differentiaaliyhtälöllä* tarkoitetaan yhtälöä

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

missä F on jokin lauseke, joka sisältää termit x, y, y', y'', jne. ja y on x:n funktio. Jos $y^{(n)}$ on korkein derivaatta, joka differentiaaliyhtälössä esiintyy, niin silloin sanotaan, että differentiaaliyhtälö on *kertalukua n*.

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen tarkoittaa funktion $y = f(x)$ etsimistä. Koska derivaatta merkitsee funktion kasvunopeutta tietyssä pisteessä, esiintyvät differentiaaliyhtälöt luonnontieteellisten käsitteiden mallintamisessa varsin usein.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen on kuitenkin varsin ongelmallista: mitään yleistä ratkaisumenetelmää ei ole olemassa. Tämä ei kuitenkaan merkitse sitä, etteikö joihinkin merkityksellisiin ongelmiin liittyviä differentiaaliyhtälöitä voisi ratkaista. Differentiaaliyhtälöitä käsitellään enemmän myöhemmällä insinöörimatematiikan kurssilla, mutta jo tässä yhteydessä voidaan esittää joitakin yksinkertaisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä.

Esimerkki 43. Tapauksessa $f'(x) = g(x)$ differentiaaliyhtälön ratkaiseminen palautuu pelkäksi antiderivaatan eli määräämättömän integraalin etsimiseksi. Tällöin tulee siis etsiä funktio $G(x)$, joka toteuttaa ehdon $G'(x) = g(x)$, jolloin voidaan valita $f(x) = G(x) + C$, missä C on jokin vakio. Vakio C määräytyy *reunaehdosta*, joka kiinnittää arvot $f(x_0)$ ja $G(x_0)$: Tällöin $C = f(x_0) - G(x_0)$. Myös yleisempien differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen löytäminen edellyttää, että reunaehdot määräävät esiintyvät vakiot.

Esimerkki 44. Radioaktiivisen hiilen ^{14}C määrä N ajan kuluessa vähenee nopeudella, joka on verrannollinen ^{14}C:n määrään N. Tämä voidaan ilmaista differentiaaliyhtälöllä

$$N'(t) = -\lambda N(t),$$

missä λ on verrannollisuuskerroin. Yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda.$$

Logaritmin derivointisääntöä käyttäen nähdään, että $\frac{d}{dt} \ln N(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}$, jolloin päädytään muotoon

$$\frac{d}{dt} \ln N(t) = -\lambda,$$

minkä ratkaiseminen on pelkkä integrointitehtävä, eli antiderivaatan määrittäminen: $\ln N(t) = -\lambda t + C$, missä C on jokin vakio. Tästä seuraa suoraan, että

$$N(t) = e^{-\lambda t + C} = e^C e^{-\lambda t},$$

ja vakio e^C määräytyy alkuehdosta $N(0) = N_0$, jolloin $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

4.8 Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

Kuten aiemmin mainittiin, mekaniikan lainalaisuuksien kuvaaminen toimi Newtonin motivaationa differentiaali- ja integraalilaskennan kehittämiseksi. Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaista ajan myötä muuttuvaa systeemiä, liikettä suoran suuntaisesti.

Ajatellaan, että kappaleen paikan suoralla ilmoittaa koordinaatti s, joka riippuu ajasta. Tällöin siis s voidaan esittää ajan funktiona $s(t)$. Jos funktio $s(t)$ on derivoituva, esittää derivaatta $s'(t)$ kappaleen *paikan muutosnopeutta*, jota yleensä kutsutaan pelkästään *nopeudeksi*. Tavanomaiseen tapaan merkitään $s'(t) = v(t)$, missä siis $v(t)$ tarkoittaa kappaleen nopeutta ajanhetkellä t. Jos edelleen $v(t)$ on derivoituva, esittää $v'(t)$ *nopeuden muutosnopeutta*, jota kutsutaan *kiihtyvyydeksi*, ja merkitään $v'(t) = a(t)$, joten siis $a(t) = s''(t)$.

Jos $a(t) = a$ on vakio, sanotaan, että kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkessä. Koska $v'(t) = a$, on tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$v(t) = at + v_0,$$

missä v_0 on jokin vakio. Edelleen on differentiaaliyhtälön $s'(t) = v(t)$ ratkaisu

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

missä s_0 on jokin vakio. Vakioita v_0 ja s_0 kutsutaan alkunopeudeksi ja alkumatkaksi. Suora sijoitus yllä oleviin kaavoihin antaa $s(0) = s_0$ ja $v(0) = v_0$, mitkä siis ilmaisevat kappaleen paikkakoordinaatin ja nopeuden ajanhetkellä $t = 0$.

Esimerkki 45. Maan pinnan läheisyydessä kaikkiin kappaleisiin vaikuttaa kiihtyvyyden $g \approx 9,81\frac{m}{s^2}$ aiheuttava gravitaatio eli painovoima. Jos pallo heitetään kahden metrin korkeudelta suoraan ylöspäin lähtönopeudella $10\frac{m}{s}$, voidaan edellä johdettua liikeyhtälöä käyttäen määrittää, kuinka suuren korkeuden se saavuttaa ja milloin se osuu maan pinnalle.

Jos maan painovoiman aiheuttavan kiihtyvyyden suunta valitaan negatiivisen akselin suunnaksi ja maan pinta nollakohdaksi, on lähtönopeus tällöin $v_0 = 10\frac{m}{s}$, lähtöpiste $s_0 = 2m$ ja kiihtyvyys g. Tällöin pallon nopeutta ajanhetkellä t esittää lauseke (yksiköt pois jättäen)

$$v(t) = -gt + 10$$

ja sen paikkaa lauseke (edellisen antiderivaatta)

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t + 2.$$

Pallo saavuttaa lakikorkeutensa silloin, kun $s'(t) = v(t) = 0$, siis ajanhetkellä $t = \frac{10}{g} \approx 1,02$ ja lakipisteen korkeus on tällöin $s(\frac{10}{g}) = \frac{50}{g} + 2 \approx 7,1$. Pallon maahantuloaika voidaan selvittää määrittämällä yhtälön $s(t) = 0$ positiivinen ratkaisu (likiarvo $2,22$).

Tässä esimerkissä ei ole otettu huomioon ilmanvastusta, eikä sitä, että maan gravitaation aiheuttama kiihtyvyys pienenee maan pinnasta etäännyttäessä. Insinöörimatematiikan differentiaaliyhtälöitä käsittelevässä osiossa esitetään menetelmiä, joiden avulla liikeyhtälöä saadaan tarkennettua mainittujen lisäehtojen mukaisesti.

4.9 Yhtälön likimääräinen ratkaiseminen

Esimerkki 46. Tee seuraava koe laskimella: aseta kulman yksiköksi radiaani ja lähtöarvoksi mikä tahansa reaaliluku. Laske tämän jälkeen kosini lähtöarvosta, sen jälkeen kosini tuloksesta, sitten kosini edellisestä, jne. Mitä useampia kertoja kosini lasketaan peräkkäin, sitä lähemmäksi tulos saadaan lukua

$$0,7390851332151606416553120876 7\ldots.$$

Toistuvaa saman toimituksen suorittamista kutsutaan *iteroinniksi*. Edellisessä esimerkissä määritettiin yhtälön $x = \cos x$ ratkaisun likiarvo iteratiivisesti.

Jos f on tarkasteltavalla välillä jatkuva funktio, voidaan yhtälön $f(x) = 0$ nollakohdan likiarvo määrittää miten tarkasti hyvänsä, mikäli tunnetaan kaksi pistettä a ja b, joissa $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset. Tällöin nimittäin Bolzanon lauseen nojalla välillä (a,b) on funktion nollakohta, ja nollakohdan sijaintia voidaan rajoittaa *haarukointimenetelmällä* (binary search):

1. Asetetaan $i = 0$, $a_0 = a$ ja $b_0 = b$.
2. Jos $|a_i - b_i|$ on pienempi kuin haluttu tarkkuus, lopetetaan prosessi, a_i on haluttu nollakohdan likiarvo
3. Asetetaan $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ (päätepisteiden a_i ja b_i keskiarvo)

4. Jos $f(c_i) = 0$, on nollakohta löytynyt ja lopetetaan prosessi.
5. Jos $f(a_i)$ ja $f(c_i)$ ovat erimerkkiset, asetetaan $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = c_i$, kasvatetaan i:tä yhdellä ja palataan kohtaan 2.
6. Jos $f(c_i)$ ja $f(b_i)$ ovat erimerkkiset, asetetaan $a_{i+1} = c_i$, $b_{i+1} = b_i$, kasvatetaan i:tä yhdellä ja palataan kohtaan 2.

Haarukointimenetelmä soveltuu luonnollisestikin vain sellaisille funktioille f, joiden arvot tarvittavissa pisteissä voidaan laskea ja joille päätös ”onko $f(a) > 0$” voidaan tehdä. Näin on esimerkiksi silloin mikäli f on polynomifunktio.

Mikäli derivoituvan funktion nollakohdalle pätee $f'(\xi) \neq 0$, voidaan riittävän tarkkaa nollakohdan likiarvoa tarkentaa myös *Newtonin menetelmällä*, joka perustuu siihen, että nollakohdan lähellä olevaan pisteeseen x_0 piirretty tangentti leikkaa x-akselin lähempänä nollakohtaa kuin x_0. Mainittu leikkauspiste voidaan määrittää geometrisesti tai seuraavalaisen idean perusteella: Jos $f(x_0) \neq 0$, pyritään etsimään sellainen h, että $f(x_0 + h) = 0$. Käyttämällä derivaatan määritelmää päädytään approksimaatioon

$$0 = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h,$$

minkä vuoksi voidaan ajatella, että valinta $h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ tuottaisi lähempänä nollakohtaa olevan pisteen $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Likiarvoa voidaan siis mahdollisesti tarkentaa asettamalla

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \tag{4.1}$$

ja yhtälön (4.1) toistuvaa soveltamista kutsutaan Newtonin menetelmäksi.

Tarkastellaan seuraavaksi, millä ehdoilla Newtonin menetelmä tuottaa hyviä likiarvoja f:n nollakohdista. Tätä varten siirrytään tarkastelemaan hieman yleisempää tilannetta.

Määritelmä 16. Ehdon $x_f = f(x_f)$ toteuttavaa pistettä x_f kutsutaan funktion f *kiintopisteeksi*.

Määritelmä 17. Jos on olemassa vakio $c \in (0,1)$ ja väli I jolle pätee $f(I) \subseteq I$ ja $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|$ aina, kun $x, y \in I$, sanotaan, että f on *kutistava* funktio (kuvaus) välillä I.

Lause 16 (Kiintopistelause). *Olkoon f kutistava kuvaus välillä $I = [a,b]$. Tällöin f:llä on kiintopiste $x_f \in I$ ja mikä hyvänsä ehdoilla $x_0 \in I$ ja $x_{i+1} = f(x_i)$ määritelty jono x_0, x_1, x_2, ... lähestyy kiintopistettä x_f.*

Todistus. Koska

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| < |x - y| = d(x,y),$$

on f jatkuva välillä I. Koska $f(I) \subseteq I$, on välttämättä $f(a) \geq a$ ja $f(b) \leq b$. Määritellään $g(x) = f(x) - x$. Näin ollen myös g on jatkuva välillä I. Nyt $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ ja $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$ ja siis funktiolla g on nollakohta x_f välillä I. Tällöin $0 = g(x_f) = f(x_f) - x_f$, joten x_f on funktion f kiintopiste.

Todistetaan, että

$$d(x_i, x_f) \leq c^i d(x_0, x_f),$$

mistä väite seuraa, sillä $c^i \to 0$ kun $i \to \infty$.

Oletuksen $f(I) \subseteq I$ mukaan kukin x_i kuuluu välille I ja

$$\begin{aligned} d(x_i,x_f) &= d(f(x_{i-1}),f(x_f)) \leq c\cdot d(x_{i-1},x_f) \\ &= c\cdot d(f(x_{i-2}),f(x_f)) \leq c\cdot c\cdot d(x_{i-2}-x_f) \\ &= c^2 d(f(x_{i-3}),f(x_f)) \leq c^2\cdot c\cdot d(x_{i-3},x_f) \\ &= c^3 d(f(x_{i_4}),f(x_f)) \leq c^3\cdot c\cdot d(x_{i_4},x_f) \\ &= \ldots c^i\cdot d(x_0,x_f). \end{aligned}$$

□

Huomautus 22. Toisinaan voidaan käyttää differentiaalilaskennan väliarvolausetta kiintopistelauseen vakion c löytämiseksi. Jos nimittäin jollakin välillä I pätee $|f'(x)| \leq c < 1$, on välttämättä

$$|f(x)-f(y)| = \left|f'(\xi)(x-y)\right| \leq c\,|x-y|\,.$$

Jotta f olisi kutistava funktio välillä I, pitää vielä selvittää onko $f(I) \subseteq I$.

Edellinen lause selittää miksi kosinifunktion iteratiivinen laskeminen kuljettaa minkä hyvänsä lähtöpisteen lähelle pistettä $0,739085\ldots$. Geometrisesti on selvää, että kosinifunktiolla on vain yksi kiintopiste $x_f \approx 0,739085\ldots$. Ensimmäisen kosinin laskeminen tuo minkä hyvänsä lähtöpisteen välille $[-1,1]$, ja toisen välille $[\cos 1, 1]$ (likiarvo $\cos 1 \approx 0,5403$) ja voidaan helposti todeta, että tällä välillä kosinin derivaatta $-\sin x$ toteuttaa epäyhtälön $-\sin x \leq \sin 1 \approx 0,8414 < 1$.

Olipa x siis mikä hyvänsä reaaliluku, on $\cos\cos x$ välillä $I = [\cos 1, 1]$, jossa edellisen lauseen oletukset toteutuvat. Tästä eteenpäin kosinin iteratiivinen laskeminen johtaa lauseen mukaan lukujonoon, joka lähestyy kiintopistettä.

Newtonin iteraatiomenetelmässä iteroitava funktio on muotoa

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

jonka derivaatta voidaan määrittää helposti, mikäli f on kahdesti derivoituva tarkasteluvälillä:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Täten siis Newtowin iteraatiomenetelmä tuottaa nollakohtaa lähestyvän jonon, mikäli tarkasteluvälillä

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq c < 1$$

jollekin positiiviselle vakiolle c. Melko helposti voidaan osoittaa, että polynomifunktioille tällainen tarkasteluväli löytyy aina, mikäli funktion derivaatta nollassa ei ole nolla.

Yhtälön $F(x) = 0$ ratkaisua voidaan toisinaan pyrkiä approksimoimaan kirjoittamalla, mikäli mahdollista, yhtälö muotoon $x = F_1(x)$ ja etsimällä likiarvoa funktion F_1 kiintopisteelle.

Esimerkki 47. Etsitään likiarvo funktion $f(x) = \ln(1+x) - x + 1$ nollakohdalle. Havaitaan aluksi, että $f(2) = \ln 3 - 1 > 0$ ja $f(3) = \ln 4 - 2 < 0$, joten välillä $(2,3)$ on olemassa nollakohta. $f(x) = 0$ voidaan kirjoittaa muodossa $x = \ln(1+x)+1$, joten funktion $g(x) = \ln(1+x)+1$ kiintopiste vastaa funktion $f(x)$ nollakohtaa. Nyt $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ ja tästä huomataan, että $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ välillä $[2,3]$. Täten voidaan vaikkapa aloittaa pisteestä $x = 3$ ja soveltaa iteraatiota: $x_0 = 3$, $x_1 = g(x_0) \approx 2,38629$, $x_2 = g(x_1) \approx 2,21974$, $x_3 = g(x_2) \approx 2,1693$, $x_4 = g(x_3) \approx 2,15351$, $x_5 = g(x_4) \approx 2,14852$, $x_6 = g(x_5) \approx 2,14693$ jne.

Matlabin `x = fzero(fun,x0)` etsii funktion `fun` nollakohtaa annetun luvun `x0` lähistöltä.

Esimerkki:

```
>> x=fzero(@sin,1)
```

```
x =

  1.5485e-024

>>
```

Omat funktiot kirjoitetaan Matlabissa ns. M-tiedostoiksi (file → new → M-file).
Esimerkki 1:

```
function y = esim(x)
% ESIM on paloittain määritelty funktio,
% lineaarinen, kun x>0 ja neliöllinen muutoin.
if (x>0)
     y=x+1
else y=x^2
end;
```

Esimerkki 2:

```
function y = esim2(x)
% esim2 on funktio cos x-x
y=cos(x)-x
```

Tämän jälkeen funktion esim2 nollakohdat voidaan määrittää fzero-toiminnolla

```
>> fzero(@esim2,0)


...


ans =

    0.7391

>>
```

Polynomin nollakohtia määrittää myös `roots`-toiminto. Esimerkiksi polynomin $x^5 - 3x + 1$ nollakohdille saadaan likiarvot seuraavasti:

```
>> roots([1,0,0,0,-3,1])

ans =

  -1.3888
  -0.0803 + 1.3284i
  -0.0803 - 1.3284i
   1.2146
   0.3347

>>
```

Luku 5
Taylorin polynomit

5.1 Korkeamman asteen approksimaatiot

Derivaatan käsitteeseen päädytään arvioimalla muutosta $f(x+h) - f(x)$ lineaarisella funktiolla $h \mapsto f'(x)h$. On luontevaa otaksua, että edellämainittua muutosta arvioiden toisen, kolmannen, tai korkeamman asteen polynomilla voitaisiin saada parempia approksimaatioita kuin lineaarisella funktiolla. Voidaankin siis kysyä, onko mahdollista arvioida muutosta $f(x+h) - f(x)$ h:n polynomina:

$$g(h) = f(x+h) - f(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots, \tag{5.1}$$

ja jos voidaan, mitkä ovat luvut c_1, c_2, c_3, ...? Symmetrian vuoksi yleensä siirretään $f(x)$ toiselle puolelle, merkitään $c_0 = f(x)$ ja $g(h) = f(x+h)$. Tällöin kysymys on siitä, mitkä ovat luvut c_1, c_2, c_3, ... esityksessä

$$g(h) = f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots. \tag{5.2}$$

Mikäli oletetaan tämänkaltaisen esityksen olemassaolo (ja viimeisen yhteenlaskettavan, ns. jäännöstermin riittävä säännöllisyys), ei kertoimien löytäminen ole erityisen ongelmallista: Jos otaksutaan, että derivoimalla yhtälö (5.2) puolittain h:n suhteen saadaan

$$g'(h) = f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + \dots, \tag{5.3}$$

löydetään sijoittamalla $h = 0$ $f'(x) = c_1$. Edelleen derivoimalla yhtälö (5.3) puolittain h:n suhteen saadaan

$$g''(h) = f''(x+h) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 h + 3 \cdot 4c_4 h^2 + \dots, \tag{5.4}$$

ja sijoitus $h = 0$ osoittaa, että $f''(x) = 2c_2$. Edelleen derivoimalla ja sijoittamalla nähdään, että $f'''(x) = 3!c_3$, $f^{(4)}(x) = 4!c_4$, jne. Induktiolla saadaan lopulta $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$.

Taustatietoa

Brook Taylor (1685–1731) oli englantilainen matemaatikko, joka tarkasteli funktioiden arviointia polynomien avulla. Tämä Taylorin tärkein työ jäi kuitenkin vaille aikalaisten huomiota. Sen merkitys havaittiin vasta yli 40 vuotta Taylorin kuoleman jälkeen.

(kuva: Wikimedia Commons)

Edellä kuvailtu päättely voidaan tehdä tietenkin vain siinä tapauksessa, että funktio f on riittävän säännöllinen (tarvittavat säännöllisyysehdot esitetään seuraavassa lauseessa). Edellä kuvailtu ajatuskulku johtaa kuitenkin helposti seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 18. Jos funktio f on n kertaa derivoituva jossakin pisteen x ympäristössä, määritellään funktion f pisteeseen x liittyvä n:n asteen *Taylorin polynomi* seuraavasti:

$$P_n(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n.$$

Taylorin polynomi approksimoi funktion f muutosta $f(x+h)$, kun h on pieni, ts. $f(x+h) \approx P_n(h)$. Polynomia $P_n(h)$ kutsutaan funktion f *Taylorin approksimaatioksi* tai *Taylorin kehitelmäksi* pisteessä x. Jos funktiolla on myös $n+1$:n kertaluvun derivaatta, voidaan virhetermiä arvioida seuraavan lauseen avulla.

Lause 17. *Olkoon f jossakin pisteen x ympäristössä $n+1$ kertaa derivoituva funktio. Tällöin $f(x+h) = P_n(h) + E_n(h)$, missä*

$$E_n(h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1},$$

ja $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x, x+h)$). Termiä $E_n(h)$ kutsutaan Taylorin kehitelmän virhetermiksi. On huomattava, että $E_n(h)$ ei ole h:n polynomi, sillä se sisältää h:sta riippuvan luvun ξ.

Todistus. Esitetään myöhemmin integraalilaskennan yhteydessä. □

Huomautus 23. Usein merkitään x:n sijasta x_0 ja h:n sijasta $x - x_0$, jolloin Taylorin kehitelmä saa muodon

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + E_n(x), \tag{5.5}$$

missä $E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ jollekin $\xi \in (x, x_0)$ (tai $\xi \in (x, x_0)$).

Sanotaan, että (5.5) on *funktion f n:nnen kertaluvun Taylorin kehitelmä pisteessä x_0*. Kehitelmän polynomia sanotaan funktion *f n:nnen asteen Taylorin polynomiksi tai Taylorin approksimaatioksi pisteessä x_0*. Jos $x_0 = 0$, saadaan

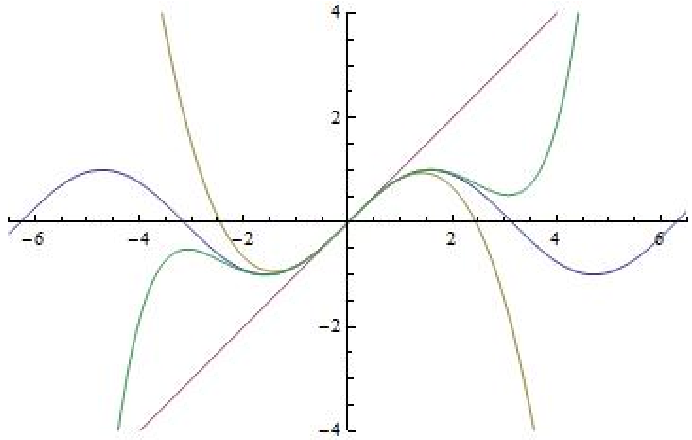
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + E_n(x), \tag{5.6}$$

missä $E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$ jollekin $\xi \in (0, x)$ (tai $\xi \in (x, 0)$). Yhtälön (5.6) kehitelmä on siis Taylorin kehitelmä pisteen $x_0 = 0$ suhteen ja sitä kutsutaan *Maclaurinin* kehitelmäksi. Samoin kehitelmässä esiintyvää polynomia kutsutaan *Maclaurinin polynomiksi*. Siihen voidaan viitata myös termillä *Maclaurinin approksimaatio*.

Esimerkki 48. $D_x \sin x = \cos x$, $D_x^2 \sin x = -\sin x$, $D_x^3 \sin x = -\cos x$, $D_x^4 \sin x = \sin x$, $D_x^5 \sin x = \cos x$, jne. Neljännen asteen Maclaurinin approksimaatio sinifunktiolle on siis

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{1}{2}(-\sin 0)x^2 + \frac{1}{3!}(-\cos 0)x^3 + \frac{1}{4!}\sin 0 \cdot x^4 + E_4(x) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + E_4(x),\end{aligned} \tag{5.7}$$

missä $E_4(x) = \frac{\cos\xi}{120}x^5$ ja $\xi \in (0, x)$ (tai $\xi \in (x, 0)$). Täten esimerkiksi välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on $|E_4(x)| \le \frac{|\cos\xi|}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \le \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \le 0{,}08$.



Kuva 5.1 Sinifunktio ja sen Taylorin polynomit astetta 1, 3 ja 5.

Esimerkki 49. Olkoon $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ja selvitetään funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ensinnäkin $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ ja $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$. Koska $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$ ja $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, huomataan, että kysytty Taylorin polynomi on

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$$

Lisäksi virhetermi on muotoa $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(1+\xi)^{\alpha-3}x^3$, missä $\xi \in (0,x)$. Jos esimerkiksi tarkastelu rajoitetaan välille $|x| \le \frac{1}{100}$, on $1+\xi < 1+x \le 1+\frac{1}{100} = \frac{101}{100}$ ja virhetermi suuruudeltaan korkeintaan $\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\cdot(\frac{101}{100})^{\alpha-3}(\frac{1}{100})^3\right|$. Esimerkiksi arvolla $\alpha = -\frac{1}{2}$ tämä on likimain $3.01804\cdot 10^{-7}$. Näin ollen

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+E_2(x),$$

missä $|E_2(x)| \le 3.01804\cdot 10^{-7}$, mikäli $|x| \le \frac{1}{100}$.

Esimerkki 50. Aiemmin mainittiin, että ääriarvon laatu voidaan selvittää toisen derivaatan merkkiä tarkastelemalla. Taylorin polynomien avulla tämä voidaan perustella seuraavasti: Oletetaan, että f on ainakin kahdesti derivoituva pisteessä x_0, $f'(x_0) = 0$, ja että f'' on jatkuva x_0:ssa. Tällöin

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 = f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

missä $\xi \in (x,x_0)$ tai $\xi \in (x_0,x)$. Jos $f''(x_0) > 0$, on jatkuvuuden perusteella myös $f''(\xi) > 0$, mikäli x on kyllin lähellä x_0:aa. Tällöin siis $f(x) \ge f(x_0)$. Tapauksessa $f''(x_0) < 0$ huomataan, että $f(x) \le f(x_0)$, jos x on riittävän lähellä x_0:aa.

MacLaurinin polynomien määrittämiseksi voidaan **Matlab**-ohjelmistossa toimia seuraavasti:

```
>> syms x
>> taylor(sin(x),7,x)

ans =

x-1/6*x^3+1/120*x^5

>>
```

Yllä annetussa komennossa 7 määrää ensimmäisen pois jätetyn termin asteen ja x muuttujan. `taylor(f,n,x,a)` tuottaa funktion f pisteeseen a liittyvän taylorin polynomin.

5.2 Ordo-merkintä

Taylorin polynomin kertoimien määrittämien korkeampien derivaattojen arvojen perusteella johtaa usein työläisin derivointitehtäviin. Siksi Taylorin polynomit kannattaa käytännössä määrittää tunnettuja Taylorin polynomeja soveltamalla. Tässä luvussa esitellään tätä helpottava ordo-merkintä.

Määritelmä 19. Jos on olemassa positiivinen vakio K ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K|g(x)|,$$

niin tällöin merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$ (luetaan "$f(x)$ on ordo $g(x)$ x:n lähestyessä x_0:aa") Tapauksessa $x_0 = \infty$ pisteen ∞ avoin ympäristö tarkoittaa jotakin väliä (M, ∞). Jos x_0 käy ilmi asiayhteydestä, voidaan se jättää merkitsemättä. Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa, että $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Esimerkki 51. Esimerkissä 48 $E_4(x) = \frac{\cos\xi}{120}x^5$, joten $|E_4(x)| \leq \frac{1}{120}\left|x^5\right|$ (*koko reaaliakselilla*). Tällöin siis

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5),$$

missä ei tarvitse merkitä näkyviin lisämäärettä $x \to x_0$, koska x_0 voidaan valita miten hyvänsä.

Esimerkin tulos yleistyy myös monille muille funktioille.

Lause 18. *Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva ja $f^{(n+1)}$ on jatkuva jossakin pisteen x avoimessa ympäristössä, niin*

$$f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1}), \quad \text{kun } h \to 0,$$

missä $P_n(x)$ on määritelmän 18 mukainen n:nen asteen Taylorin polynomi.

Todistus. Lauseen 17 mukaan $E_n(h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}$. Koska $f^{(n+1)}$ on jatkuva jossakin x:n ympäristössä $(x-a, x+a)$, on funktiolla $\left|f^{n+1}(x)\right|$ maksimi M suljetulla välillä $[x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}]$. Tällä välillä siis

$$|E_n(h)| = \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}M\left|h^{n+1}\right|.$$

□

Taylorin kehitelmästä ja lauseesta 18 saadaan helposti mm. seuraavat esitykset:

Seuraus 7. *Kun $x \to x_0$, jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee*

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$,
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$,
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$,
4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$,
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$,
6. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$.

Kohdissa 1 ja 2 $x_0 \in (-1,1)$, kohdissa 3, 4 ja 5 $x_0 \in \mathbb{R}$, ja kohdassa 6 $x_0 \in [-1,1]$ ja $\tan^{-1}$ *merkitsee funktion* $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *käänteisfunktiota.*

Ordomerkinnän kanssa on noudatettava erityistä huolellisuutta, sillä merkinnässä $f(x) = O(g(x))$ kun $x \to x_0$ ei kyseessä ole varsinainen yhtäsuuruus, vaan merkinnällä ilmaistaan, että pisteen x_0 ympäristössä funktio $K|g(x)|$ rajoittaa funktiota $|f(x)|$. Täten $O(g(x), x_0)$ voidaan käsittää funktioiden joukoksi: siihen kuuluvat kaikki funktiot, jotka toteuttavat määritelmän 19 ehdot. Näin tulkittuna merkintä $f(x) = O(g(x))$ tarkoittaa, että $f(x)$ kuuluu joukkoon $O(g(x))$.

Ordomerkintä tarjoaa kuitenkin merkittäviä etuja raja-arvojen käsittelyssä, sillä potenssifunktioiden ordolausekkeilla laskeminen on suoraviivaista:

Lause 19. *Olkoot m ja n ($n \leq m$) positiivisia reaalilukuja. Kun $x \to x_0$, on*

1. $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$, *jos* $|x_0| < 1$
2. $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$, *jos* $|x_0| > 1$
3. $cO(x) = O(x)$, *kun* $c \in \mathbb{R}$.
4. $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$.
5. $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.
6. $x^{-m}O(x^{n+m}) = O(x^n)$.
7. $f(x) = O(x^n) \Rightarrow f(x) = O(x^m)$, *jos* $|x_0| > 1$.
8. $\lim\limits_{x \to x_0} O((x - x_0)^n) = 0$.

Todistus. Kaikki kohdat seuraavat ordolausekkeen määritelmästä melko suoraviivaisesti. Todistetaan esimerkiksi sääntö numero 4. Olkoon tätä varten $f(x)$ joukon $O(x^m)$ funktio, toisin sanoen, jossakin pisteen x_0 ympäristössä $|f(x)| \leq K|x^m|$. Tällöin myös $|x^n f(x)| \leq |x^n| K |x^m| = K|x^{n+m}|$ manitussa pisteen x_0 ympäristössä. □

Edellisen lauseen mukaan Taylorin kehitelmästä siis seuraa esitys $f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1})$, mutta myös käänteinen tulos pätee: jos astetta n oleva polynomi $Q(h)$ approksimoi funktion f muutosta $f(x+h)$ riittävän tarkasti, on välttämättä $Q(h) = P_n(h)$.

Lause 20. *Jos $Q(h)$ on astetta n oleva polynomi, f $n+1$ kertaa derivoituva ja $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$, kun $h \to 0$, on $Q(h) = P_n(h)$, funktion f Taylorin polynomi pisteessä x.*

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 24. Vaihtamalla merkintöjä samoin kuin huomautuksessa 23, voidaan edellinen lause kirjoittaa seuraavassa muodossa: Jos $Q(x)$ on astetta $n+1$ oleva polynomi ja $f(x) = Q(x) + O((x - x_0)^{n+1})$ kun $x \to x_0$, niin silloin $Q(x)$ on funktion f astetta n oleva Taylorin polynomi pisteessä x_0.

Lausetta 20 ja lauseen 19 sääntöjä käyttäen voidaan etsiä Taylorin kehitelmiä. Jos nimittäin löydetään *jokin* astetta n oleva polynomi, jolle pätee $f(x) = Q(x - x_0) + O((x - x_0)^{n+1})$, on $Q(x)$ välttämättä Taylorin kehitelmä pisteessä x_0.

Esimerkki 52. Hyperbolinen kosini määritellään $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Etsitään sille astetta $2n$ oleva Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$. Ensinnäkin seurauksen 7 mukaan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

ja tähän sijoittamalla $-x$ saadaan

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}).$$

Laskemalla nämä yhteen ja kakkosella jakamalla saadaan (ordotermien yhteenlaskusääntöjä käyttäen)

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}), \tag{5.8}$$

jolloin siis funktion $\cosh x$ astetta $2n$ (myös $2n+1$) oleva Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$ on yhtälön 5.8 oikealla puolella esiintyvä polynomi.

Esimerkki 53. Etsitään funktion $\ln x$ Taylorin polynomi $P_2(x)$ pisteessä $x_0 = 2$. Tämä voidaan tehdä kirjoittamalla

$$\ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln\big(2\big(1 + \frac{x-2}{2}\big)\big) = \ln 2 + \ln\big(1 + \frac{x-2}{2}\big)$$

ja käyttämällä seurauksen 7 kohtaa 2, mistä saadaan

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + O((x-2)^3).$$

Lauseen 20 (katso huomautus 24) mukaan etsitty polynomi on siis

$$P_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2.$$

5.3 Raja-arvojen määrittäminen

Taylorin polynomit ja ordomerkintä muodostavat työkalun, joka soveltuu toisinaan raja-arvojen määrittämiseen l'Hospitalin sääntöä suoraviivaisemmin.

Esimerkki 54. Määritettävä raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}.$$

Osoittaja ja nimittäjä lähenevät nollaa muuttujan lähetessä nollaa ja ovat derivoituvia kaikkialla. Tällöin l'Hospitalin säännön mukaan raja-arvo saadaan muotoon

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x}.$$

Edellinen raja-arvo täyttää jälleen l'Hospitalin säännön edellytykset, joten se saadaan muotoon

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{2e^x - 2}.$$

Käytetään jälleen kerran l'Hospitalin sääntöä, jolloin raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos(2x)}{2e^x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Taylorin polynomien ja ordotermien avulla saadaan jossain määrin syvällisempi ymmärtämys siitä miksi saatuun raja-arvoon päädyttiin. Seurauksen 7 kohdasta 4 saadaan

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + O(x^5),$$

joten

$$\begin{aligned}\frac{2\sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} &= \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)) - (2x - \frac{4}{3}x^3 + O(x^5))}{2(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)) - 2 - 2x - x^2} \\ &= \frac{x^3 + O(x^5)}{\frac{1}{3}x^3 + O(x^4)} = \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x)},\end{aligned}$$

mistä nähdään, että raja-arvo x:n lähetessä nollaa on 3.

Luku 6
Integraalit

Integraalin käsite on ollut tuttu jo Arkhimedeelle, joka on lähestynyt käsitettä nykyaikaiseen tapaan summien kautta. Newtonin ja Leibnizin aikalaisten näkökulmasta katsoen integraali on eräänlainen summa, jossa lasketaan yhteen "äärettömän monta" "äärettömän pientä" suuretta, ja saadaan tulokseksi äärellinen suure. Tämä historiallinen käsitys on sittemmin jouduttu täsmällisyyden saavuttamiseksi syrjäyttämään, mutta nykyinen täsmällisempikin integraalikäsite on edelleen perua summista. Tässä luvussa todetaan, miten integraali voidaan määritellä eräänlaisena summien raja-arvona, ja siksi integraaleilla onkin monia summien ominaisuuksia.

Erityisen huomionarvoista on, että lähtökohtaisesti integraalin käsitteellä ei ole mitään tekemistä derivaatan kanssa, vaan yhteys derivaattaan löytyy vasta analyysin peruslauseen myötä.

Tässä luvussa käsiteltävä integraalikäsite on perua Newtonilta ja Leibniziltä, mutta sen matemaattinen täsmällisyys on perua Bernhard Riemannilta. Vaikka Riemann esitti käsitteen täsmällisesti, pitää vielä korostaa Jean-Gastoun Darboux'n osuutta: Darboux esitti Riemannin määritelmään yhtyvän integraalikäsitteen, mutta Darboux'n määritelmä korostaa integraalin intuitiivisia ominaisuuksia ja siitä voidaan johtaa integraalin teoreettisia ominaisuuksia helpommin.

On myös lähtökohtaisesti toisin määriteltyjä, yleisempiä integraalikäsitteitä (kuten *Lebesgue*-integraali), jotka kuitenkin johtavat samaan lopputulokseen mikäli tarkastellaan funktioita, jotka ovat myös integroituvia Riemannin (ja Darboux'n) määritelmän mukaan. Tällä kurssilla tyydytään kuitenkin Riemann-integraaliin, joka esitetään käsitteellisesti yhtäpitävällä, Darboux'n kehittämällä tavalla.

Pinta-alan määrittävä integraali esitetään nykyaikaiset täsmällisyysvaatimukset täyttävällä tavalla. Kurssisisällön pitämiseksi kohtuullisen kokoisena muita geometrisiin sovelluksiin liittyviä integraaleja sen sijaan esitetään lähinnä Newtonin ja Leibnizin infinitesimaalilaskennan ajatustapaa noudattaen.

Taustatietoa

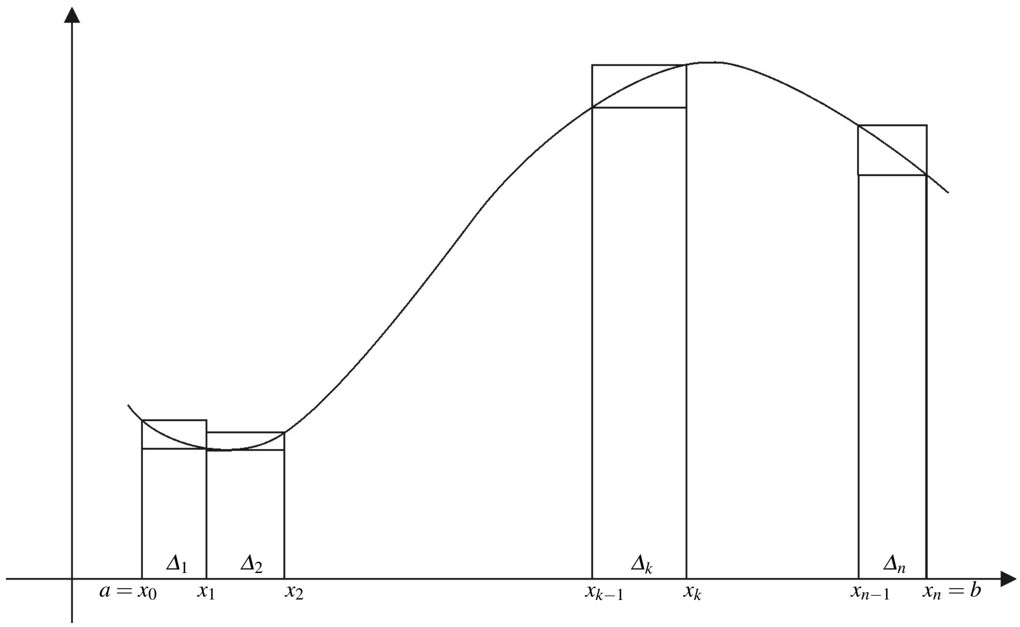
Bernhard Riemann (1826–1866) oli saksalainen matemaatikko, joka opiskeli Gaussin johdolla. Riemann teki uraauurtavaa työtä differentiaali- ja integraalilaskennan, kompleksifunktioiden teorian ja geometrian alalla. Riemannin geometrian työt loivat pohjan Einsteinin yleiselle suhteellisuusteorialle ja hänen esittämänsä yhteys alkulukujen jakautumisen ja ns. *zeta-funktion* epätriviaalien nollakohtien välillä johti nykymatematematiikan kuuluisimpaan avoimeen ongelmaan, ns. Riemannin hypoteesiin. Hypoteesin oikeaksi todistamisesta on luvattu miljoonan dollarin palkkio.

(kuva: Wikimedia Commons)

6.1 Riemann-integraali Darboux'n tavalla

Olkoon f välillä $[a,b]$ $(b > a)$ määritelty, rajoitettu funktio. Integraalikäsitteen intuitiivisena taustana voidaan pitää tapausta $f(x) \geq 0$, jossa pyritään määrittämään pinta-ala, jota rajoittavat x-akseli, funktion kuvaaja ja suorat $x = a$ ja $x = b$. Tämä voidaan saavuttaa seuraavalla tavalla.

Välin $[a,b]$ *jako* tarkoittaa äärellistä joukkoa $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$ kun $0 \leq i \leq n-1$. Merkitään jaon i:nnettä väliä Δ_i:llä, siis $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ja tämän välin pituutta $\Delta_i x$:llä, siis $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Olkoot lisäksi M_i ja m_i funktion välillä Δ_i supremum- ja infimumarvot: $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$, $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$. Koska f oletettiin rajoitetuksi *koko välillä* $[a,b]$, ovat M_i ja m_i olemassa kaikille osaväleille Δ_i.



Kuva 6.1 Jaon ylä- ja alasummia vastaavat pylväät osaväleilla 1, 2, k ja n. Väliä Δ_k vastaavien pylväiden korkeudet ovat m_k ja M_k

Määritelmä 20. Välin $[a,b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n *yläsumma* on

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x$$

ja *alasumma*

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x.$$

Lause 21. $\underline{S}_D \leq \overline{S}_D$.

Todistus. Seuraa suoraan siitä, että $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\} = M_i$. $\square$

Määritelmä 21. Jos D_1 ja D_2 ovat välin $[a,b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1:n *tihennys* jos $D_1 \subseteq D_2$. Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, voidaan siis tihennys D_2 saada D_1:stä lisäämällä D_1:een äärellinen määrä pisteitä.

Lause 22. *Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, on $\overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}$ ja $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$.*

Todistus. Koska D_2 saadaan D_1:stä äärellinen määrä pisteitä lisäämällä, riittää tarkastella tapausta, jossa jaon D_1 k:nnetta väliä tihennetty yhdellä pisteellä x, siis $x_{k-1} < x < x_k$.

Tarkastellaan aluksi yläsummia. Jakoon D_2 liittyvä Darboux'n summa $\overline{S}_{D_2}$ saadaan nyt siis summasta $\overline{S}_{D_1}$ korvaamalla tämän k:s yhteenlaskettava $M_k \Delta_k x$ lausekkeella $M' \Delta'_x + M'' \Delta''_x$, missä M' ja M'' ovat funktion arvojen supremumit väleillä $\Delta' = [x_{k-1}, x]$ ja $\Delta'' = [x, x_k]$. On siis osoitettava, että $M' \Delta'_x + M'' \Delta''_x$ on korkeintaan $M_k \Delta_k x$. Koska M_k on funktion $f(x)$ pienin yläraja *koko* välillä $[x_{k-1}, x_k]$, on siis $M' \leq M_k$ ja $M'' \leq M_k$. Tällöin

$$M' \Delta'_x + M'' \Delta''_x \leq M_k(x - x_{k-1}) + M_k(x_k - x) = M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k \Delta_k x.$$

Alasummia koskeva väite seuraa samalla tavalla siitä tosiasiasta, että osajoukon infimum ei ole pienempi kuin koko joukon infimum. □

Lause 23. *Kaikki alasummat ovat korkeintaan mikä tahansa yläsumman suuruisia, ts. $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$, missä D_1 ja D_2 ovat mitä hyvänsä välin $[a,b]$ jakoja.*

Todistus. Olkoon $D = D_1 \cup D_2$, jolloin siis D on sekä jaon D_1 että jaon D_2 tihennys. Edellisten lauseiden mukaan

$$\underline{S}_{D_1} \leq \underline{S}_D \leq \overline{S}_D \leq \overline{S}_{D_2}.$$

□

Ylä- ja alasummia on joka tapauksessa molempia olemassa: esimerkiksi välin $[a,b]$ karkein jako $D_0 = \{a,b\}$ tuottaa alasumman $\underline{S}_{D_0} = m(b-a)$ ja yläsumman $\overline{S}_{D_0} = M(b-a)$, missä $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ja $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Edellisen lauseen mukaan kaikkien alasummien joukko on ylhäältä rajoitettu ja kaikkien yläsummien joukko alhaalta rajoitettu, joten yläsummien joukolla on infimum ja alasummien joukolla supremum.

Määritelmä 22. Funktion f *yläintegraali* välillä $[a,b]$ on

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$$

ja *alaintegraali* välillä $[a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$$

Lauseesta 23 seuraa, että alaintegraali on suuruudeltaan korkeintaan yläintegraali.

Määritelmä 23. Välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio f on *(Riemann-) integroituva* tällä välillä, mikäli

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Riemann-) integraaliksi välillä $[a,b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integraalin *ala-* ja *ylärajoiksi* ja funktiota f *integrandiksi*.

Esimerkki 55. Vakiofunktio $f(x) = c$ on integroituva millä tahansa välillä $[a,b]$. Funktion infimum ja supremum nimittäin ovat millä hyvänsä välillä molemmat c, ja tällöin mihin tahansa jakoon $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) liittyvät ylä- ja alasummat ovat molemmat muotoa

$$\sum_{i=1}^{n} c\Delta_i x = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Täten siis ylä- ja alasummien joukossa on vain yksi alkio $c(b-a)$, joka on yhtäaikaa sekä alasummien supremum että yläsummien infimum. Vakiofunktion $f(x) = c$ integraali on siis

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

Esimerkki 56. Funktio $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ joka on määritelty ehdoilla

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \quad \text{muulloin.} \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään välillä $[a,b]$ ($a < b$). Tämä johtuu siitä, että jokaisella välillä $[x_{i-1}, x_i]$ ($x_{i-1} < x_i$) on sekä rationaali- että irrationaaliluku, siis funktion f supremum 1 ja infimum 0. Tällöin funktion f jokainen yläsumma on $b-a$ ja alasumma 0, ja siksi yläintegraalin arvo on $b-a$ ja alaintegraalin 0.

Koska integraalin määritelmä perustuu *kaikkiin mahdollisiin* välin $[a,b]$ jakoihin liittyviin ylä- ja alasummiin, on integraalin laskeminen määritelmään perustuen varsin työlästä. Seuraavan lauseen perusteella voidaan kuitenkin tarkastelua toisinaan rajoittaa tietyntyyppisiin jakoihin.

Lause 24. *Jos $\mathscr{D}'$ on jokin joukko välin $[a,b]$ jakoja ja*

$$I = \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathscr{D}'\} = \inf\{\overline{S}_{D'} \mid D' \in \mathscr{D}'\},$$

niin tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = I.$$

Todistus. Olkoon $\mathscr{D}$ *kaikkien* välin $[a,b]$ jakojen joukko. Tällöin

$$I = \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathscr{D}'\} \leq \sup\{\underline{S}_D \mid D \in \mathscr{D}\} = \underline{\int_a^b} f$$
$$\leq \overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}_D \mid D \in \mathscr{D}\} \leq \inf\{\overline{S}_{D'} \mid D \in \mathscr{D}'\} = I.$$

□

Jos siis esimerkiksi *tasavälisiin jakoihin* liittyviin funktion f Darboux'n summille alasummien supremum I on sama kuin yläsummien infimum, niin tällöin f on integroituva välillä $[a,b]$, ja integraalin arvo on I.

Esimerkki 57. Olkoon $a = 0$, $b = 1$ ja $f(x) = x^2$ ja $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ välin $[0,1]$ tasavälinen jako. Yhden jakovälin pituus on tällöin $\Delta_i x = \frac{1}{n}$, ja koska f on jatkuva ja välillä $[0,1]$, on sillä olemassa maksimi- ja miniarvo jokaisella välillä $\Delta_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Koska lisäksi f on kasvava välillä $[0,1]$, on $M_i = (\frac{i}{n})^2$ ja $m_i = (\frac{i-1}{n})^2$.

Jakoon D_n liittyvät ylä- ja alasummat voidaan laskea nyt kaavan

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

avulla:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{D_n} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{3}(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}) \quad \text{ja} \\
\underline{S}_{D_n} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \\
&= \frac{1}{3}(1 - \frac{3n-1}{2n^2}).
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että tasavälisten jakojen joukossa yläsummien infimum on $\frac{1}{3}$, mikä on sama kuin alasummien supremum. Täten siis

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

6.2 Funktioiden integroituvuus

Lause 25 (Riemannin integroituvuusehto). *Välillä $[a,b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ε kohti on olemassa välin $[a,b]$ jako $D = D_\varepsilon$, jolle*

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D \leq \varepsilon.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että f on integroituva ja merkitään $I = \int_a^b f$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska I on yläsummien infimum (pienin alaraja), on olemassa sellainen yläsumma $\overline{S}_{D_1}$, että $\overline{S}_{D_1} < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Koska I on myös alasummien supremum, on olemassa sellainen alasumma $\underline{S}_{D_2}$, että $\underline{S}_{D_2} > I - \frac{\varepsilon}{2}$. Olkoon $D = D_1 \cup D_2$ jakojen D_1 ja D_2 yhteinen tihennys. Tällöin lausetta 22 käyttämällä saadaan

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D \leq \overline{S}_{D_1} - \underline{S}_{D_2} < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Oletetaan sitten, että lauseen ehto on voimassa. Koska yläintegraali on korkeintaan minkä hyvänsä yläsumman suuruinen ja alaintegraali vähintään minkä hyvänsä alasumman suuruinen, on

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}_D - \underline{S}_D < \varepsilon.$$

Koska ylä- ja alaintegraalin erotus ei ole negatiivinen, mutta pienempi kuin mikä hyvänsä positiiviluku ε, on se nolla. □

Lause 26. *Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$, on se myös integroituva tällä välillä.*

Todistus. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, on se myös tasaisesti jatkuva tällä välillä. Täten siis $|f(x_1) - f(x_2)|$ saadaan miten pieneksi tahansa kun $|x_1 - x_2|$ valitaan riittävän pieneksi (ja x_1 ja x_2 on valittu väliltä $[a,b]$). Erityisesti

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

kun $|x_1 - x_2| < \delta$. Olkoon D välin $[a,b]$ jako, jonka kukin jakoväli Δ_i on korkeintaan δ:n pituinen. Jatkuvana funktiona f saavuttaa kullakin jakovälillä Δ_i maksimi- ja minimiarvon M_i ja m_i, jotka siis täten yhtyvät supremum- ja infimumarvoihin. Tällöin $M_i - m_i = f(x_i) - f(y_i)$ joillekin jakovälin Δ_i pisteille x_i ja y_i, joten $M_i - m_i = |M_i - m_i| = |f(x_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, sillä $|x_i - y_i| < \delta$ (koska x_i ja y_i molemmat kuuluvat jakoväliin Δ_i, jonka pituus on korkeintaan δ). Näin ollen

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i x < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Koska ylä- ja alasumman erotus saadaan miten pieneksi hyvänsä, seuraa integroituvuus lauseesta 25. □

Lause 27. *Jos integroituvan funktion arvoa muutetaan yhdessä pisteessä, ei integroituvuus eikä integraalin arvo muutu.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Huomaa lisäksi, että ”yhdessä” voidaan helposti muuttaa muotoon ”äärellisen monessa”.

6.3 Integraalien perusominaisuuksia

Integraalit saadaan summien rajatapauksina, minkä vuoksi monet summien ominaisuuksista periytyvät integraaleille. Seuraavassa esitetään tärkeimpiä integraalien ominaisuuksia, mutta näiden todistukset jätetään harjoituksiksi.

Lause 28. *Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a,b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f+g$ ovat integroituvia välillä $[a,b]$ ja*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f,$$
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus. Jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 29. *Jos f on integroituva välillä $[a,b]$ ja $c \in (a,b)$, niin*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus. Jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 30. *Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a,b]$, niin samoin on fg. Jos lisäksi $\frac{1}{g}$ on rajoitettu välillä $[a,b]$, niin myös $\frac{f}{g}$ on integroituva.*

Todistus. Sivuutetaan.

Seuraavaksi laajennetaan integraalin määritelmää sellaisiin tapauksiin, missä integraalin yläraja on pienempi kuin alaraja.

Määritelmä 24. Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a,b]$, määritellään

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

jos $f(a)$ on määritelty, määritellään edelleen

$$\int_a^a f = 0.$$

Huomautus 25. Ylläolevista määritelmistä seuraa, että mikäli f on integroituva välillä I, ja $a,b,c \in I$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

olipa lukujen a, b ja c keskinäinen suuruusjärjestys mikä hyvänsä.

Myös perustiedot-osiossa esitetyt summien suuruusarviot kääntyvät integraalien suuruusarvioiksi. Seuraavassa esitettyjen tulosten todistukset perustuvat Darboux'n summien arviointeihin.

Lause 31. *Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a,b]$ ja $f \le g$, on*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Jos erityisesti valitaan $f = 0$, saadaan seurauksena, että välillä $[a,b]$ positiivisen funktion integraali on vähintään 0. Tätä havaintoa voidaan tarkentaa seuraavasti:

Lause 32. *Jos f on jatkuva ja $f \ge 0$ välillä $[a,b]$ niin $\int_b^a f = 0$ tarkalleen silloin kun $f = 0$ välillä $[a,b]$.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

Myös summien kolmioepäyhtälö siirtyy integraaleille:

Lause 33. *Jos f on integroituva välillä $[a,b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Todistus. Sivuutetaan, mutta huomataan, että mikäli $a > b$, pätee lause muodossa

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|.$$

6.4 Analyysin peruslause

Aiemmin on nähty, että Arkhimedeen tapa laskea integraaleja summien avulla saattaa olla varsin työläs. Arkhimedes ei tuntenut differerentiaalilaskentaa, jonka tarjoama yhteys integraalilaskentaan helpottaa integraalien laskemista huomattavasti. Tässä luvussa esiteltävä 1600-luvulla löydetty tulos, analyysin peruslause oli huomattavin matematiikan edistysaskel 1800 vuoteen. Analyysin peruslause käytännössä yhdistää differentiaali- ja integraalilaskennan.

Oletetaan, että funktio f on integroituva jollakin välillä I ja että $c \in I$. Tällöin kutakin $x \in I$ kohti on olemassa integraali $\int_c^x f$, joten siis yhtälö

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

määrittelee funktion $F : I \to \mathbb{R}$. Näin saatua funktiota kutsutaan f:n *integraalifunktioksi*.

Lause 34. *Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I.*

Todistus. Merkitään $M = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}$ ja $x_0 \in I$. Jos x on niin lähellä pistettä x_0, että $x \in I$, on tällöin

$$|F(x_0) - F(x)| = \left|\int_c^{x_0} f - \int_c^x f\right| = \left|\int_x^{x_0} f\right| \leq \left|\int_x^{x_0} |f|\right| \leq M\,|x_0 - x|.$$

Tällöin $d(F(x_0), F(x)) = |F(x_0) - F(x)| < \varepsilon$, kunhan $d(x_0, x) = |x_0 - x| < \frac{\varepsilon}{M}$. Koska x_0 on mikä hyvänsä välin I piste, on F jatkuva koko välillä I. □

Esimerkki 58. Edellisessä lauseessa ei tarvittu integrandin jatkuvuutta. Jos esimerkiksi määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ 1, \text{ kun } x \geq 0, \end{cases}$$

sekä $F(x) = \int_{-1}^x f$, kun $x \in [-1,1]$. Tällöin

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ x, \text{ kun } x \geq 0, \end{cases}$$

ja siis F on jatkuva myös f:n epäjatkuvuuskohdassa $x = 0$. Sen sijaan F ei ole derivoituva tässä pisteessä.

Lause 35 (Analyysin peruslause). *Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f = f(x).$$

Todistus. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 sekä h niin pieni, että x_0+h kuuluu välille I jossa f on integroituva. Tällöin

$$F(x_0+h)-F(x_0) = \int_c^{x_0+h} f - \int_c^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f.$$

Näin saatu lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} F(x_0+h)-F(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0)+f(x)-f(x_0))\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x)-f(x_0))\,dx \\ &= hf(x_0) + h\cdot\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x)-f(x_0))\,dx. \end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että lauseke $\varepsilon(h) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x)-f(x_0))\,dx$ saadaan miten pieneksi hyvänsä valitsemalla h riittävän läheltä nollaa. Juuri tässä tarvitaan funktion f jatkuvuutta pisteessä x_0. Valitaan $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, kun $d(x,x_0) < \delta$. Kun valitaan h siten että $|h| < \delta$, toteutuu $d(x,x_0) < \delta$ ja siis

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h)-0| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x)-f(x_0)\,dx\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)-f(x_0)|\,dx\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dx\right| = \frac{1}{|h|}\varepsilon\,|h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jos siis vielä määritellään $\varepsilon(0) = 0$, on $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$ ja

$$F(x_0+h)-F(x_0) = hf(x_0) + h\varepsilon(h),$$

mikä derivaatan määritelmän mukaan tarkoittaa, että $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Seuraus 8. *Jos funktio f on jatkuva välillä I, on sen integraalifunktio F derivoituva välillä I ja $F'(x) = f(x)$ kun $x \in I$. Täten siis välillä I jatkuvalla funktiolla on aina olemassa antiderivaatta eli kantafunktio eli määräämätön integraali.*

Huomautus 26. Vaikka edellisen seurauksen mukaan jatkuvan funktion antiderivaatta on aina olemassa, ei sille välttämättä löydy aina yksinkertaista esitystapaa. On nimittäin mahdollista, että alkeisfunktion antiderivaatta ei ole alkeisfunktio.

Esimerkki 59. Olkoon $h(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ja lasketaan $h'(x)$. Koska $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, saadaan integrandi määriteltyä ja jatkuvaksi origossa asettamalla sen arvoksi 1. Kun merkitään $g(u) = \int_0^u \frac{\sin t}{t}\,dt$, huomataan, että $h(x) = g(x^2)$ ja siis $h'(x) = g'(x^2)2x = \frac{\sin(x^2)}{x^2}2x = \frac{2\sin x^2}{x}$.

6.5 Integraalin arvon määrittäminen

Integraalin arvon määrittäminen tapahtuu suoraviivaisimmin analyysin peruslausetta sekä integraalilaskennan peruslausetta hyödyntäen. Jos nimittäin F on jokin välillä $[a,b]$ jatkuvan funktion f antiderivaatta, on $F'(x) = f(x)$, mutta analyysin peruslauseen mukaan on myös

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Tällöin integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C,$$

missä C on jokin vakio. Sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön $x = a$ saadaan vakion C arvoksi $C = -F(a)$ ja kun edelleen sijoitetaan $x = b$, saadaan integraalin laskemiseksi ns. *Newton–Leibnizin* kaava.

Lause 36 (Newtonin–Leibnizin kaava). *Välillä $[a,b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä 25. Merkintä ”sijoitus a:sta b:hen” määritellään

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Esimerkki 60. Koska $\frac{d}{dx}\cos x = \sin x$, saadaan

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = \Big/_{0}^{\pi} \sin x = \sin\pi - \sin 0 = 0.$$

Newton–Leibnizin kaavan suora soveltaminen edellyttää, että f on jatkuva integrointivälillä. Kuitenkin, jos funktiolla f on äärellisen monta epäjatkuvuuskohtaa tarkasteluvälillä, voidaan Newton–Leibnizin kaavaa soveltaa jakamalla väli osiin.

Esimerkki 61. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0, \\ x+1, & \text{kun } 0 \le x \le 1, \\ x^2+1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Tällöin

$$\int_{-1}^2 f = \int_{-1}^0 1\,dx + \int_0^1 (x+1)\,dx + \int_1^2 (x^2+1)\,dx = \frac{35}{6}.$$

Antiderivaatan määrittäminen voi olla toisinaan hankalaa, mutta *osittaisintegrointi* saattaa helpottaa integraalin määrittämistä.

Lause 37 (Osittaisintegrointi). *Jos f ja g ovat derivaattoineen jatkuvia funktioita välillä $[a,b]$, niin*

$$\int_a^b fg' = \Big/_a^b fg - \int_a^b f'g.$$

Todistus. Seuraa suoraan tulon derivointisäännöstä $(fg)' = f'g + fg'$ ja Newton–Leibnizin kaavasta.
□

Esimerkki 62. Lasketaan integraali $\int_0^2 xe^x\,dx$. Merkitään tätä varten $f(x) = x$ ja $g(x) = e^x$, jolloin siis $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ ja osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_0^2 xe^x\,dx = \Big/_0^2 xe^x - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1.$$

Myös *sijoitus integraaliin* saattaa helpottaa integraalin määrittämistä.

Lause 38 (Sijoitus määrättyyn integraaliin). *Olkoon f jatkuva välillä I ja $[a,b] \subseteq I$. Olkoon lisäksi g välillä $[\alpha,\beta]$ derivaattoineen jatkuva funktio, joka toteuttaa ehdot $g([\alpha,\beta]) \subseteq I$ sekä $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Todistus. Olkoon $h(x) = \int_a^x f$. Koska f on jatkuva, on h derivoituva välillä I ja $h'(x) = f(x)$. Tällöin myös funktio $F(t) = h(g(t))$ on derivoituva ja $F'(t) = h'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Newton–Leibnizin kaavaa käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta F'(t)\,dt = \Big/_\alpha^\beta F(t) = h(g(\beta)) - h(g(\alpha))\\ &= h(a) - h(b) = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Esimerkki 63. Lasketaan integraali $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ käyttämällä sijoitusta $x = g(t) = \sin t$. Valitaan $\alpha = 0$ ja $\beta = \frac{\pi}{2}$, jolloin $g(\alpha) = g(0) = 0$ ja $g(\beta) = g(\frac{\pi}{2}) = 1$. Lisäksi $g'(t) = \cos t$, joten

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt.$$

Näin saatu integraali voidaan edelleen määrittää trigonometrisen kaavan $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ avulla:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Palautetaan mieleen, että funktio f on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ ja *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$. Parillisten tai parittomien funktioiden integraalin määrittämistä voidaan toisinaan yksinkertaistaa:

Lause 39. *Olkoon f jatkuva välillä $[-a,a]$. Jos f on parillinen, on*

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f,$$

ja jos f on pariton, on

$$\int_{-a}^{a} f = 0.$$

Todistus. Hajotetaan integraali osiin:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ja sijoitetaan ensimmäiseen summattavaan $x = g(t) = -t$. Tällöin

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx.$$

Näin ollen

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} (f(-x)+f(x))\,dx,$$

ja väite seuraa suoraan tästä. □

Esimerkki 64. Lasketaan integraali $\int_{\pi}^{3\pi} \sqrt{1+\sin^2 x}\sin x\,dx$. Tehdään ensiksi sijoitus $x = g(t) = t - 2\pi$, jolloin $g'(t) = 1$ ja

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sqrt{1+\sin^2 x}\,\sin x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\sin^2(t-2\pi)}\,\sin(t-2\pi)\,dt.$$

Sinifunktion jaksollisuudesta johtuen ylläoleva integraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\sin^2 t}\,\sin t\,dt,$$

josta puolestaan integrandin parittomuuteen perustuen nähdään, että integraalin arvo on 0.

Matlabissa on määrätyn integraalin laskemiseksi symbolisen matematiikan työkalu:

```
>> syms x
>> f=x^5

f =

x^5

>> int(f,x,1,3)

ans =

364/3

>>
```

Määrätyn integraalin likiarvon laskemista (numeerista integrointia) varten Matlabissa on `quad` ja `quadl`-toiminnot:

```
>> quad(@sin,1,4)
```

```
ans =

    1.1939

>>
```

Luku 7
Integraalin sovelluksia

7.1 Pinta-ala

Olkoon f on välillä $[a,b]$ määritelty jatkuva, ei-negatiivinen funktio. Tarkastellaan aluetta, jota rajoittavat x-akseli, suorat $x=a$ ja $x=b$, sekä käyrä $y=f(x)$. Integraalin määritelmän perusteella on täysin ilmeistä, että ainoa mielekäs tapa määritellä tarkasteltavan alueen pinta-ala on nimenomaan määritellä ala integraaliksi

$$\int_a^b f.$$

Esimerkki 65. Selvitetään käyrän $y=x^2$, x-akselin ja suorien $x=2$ ja $x=4$ väliin jäävä ala. Suoralla laskulla saadaan

$$A=\int_2^4 x^2\,dx = \mathop{\Big/}_2^4 \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(4^3-2^3) = \frac{56}{3}$$

Esimerkki 66. Selvitetään käyrien $y=x^3$, $y=x^2$ ja suorien $x=3$ ja $x=5$ väliin jäävä ala. Aluksi todetaan, että välillä $[3,5]$ käyrä $y=x^3$ on kokonaan käyrän $y=x^2$ yläpuolella. Voidaan siis laskea käyrän $y=x^3$, x-akselin ja suorien $x=3$ ja $x=5$ väliin jäävä ala ja vähentää siitä ala, joka jää käyrän $y=x^2$ alle välillä $[3,5]$. Näin ollen kysytty ala on

$$A=\int_3^5 x^3\,dx - \int_3^5 x^2\,dx = \int_3^5 (x^3-x^2)\,dx = \mathop{\Big/}_3^5 (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3) = \frac{310}{3}.$$

Infinitesimaalilaskennan näkökulmasta pinta-alan määrääminen voidaan tulkita seuraavasti: Väli $[a,b]$ jaetaan ”äärettömän kapeisiin” suorakaiteisiin, joiden leveys on dx ja korkeus $f(x)$. Kunkin ”äärettömän kapean” suorakaiteen ala on täten $f(x)\,dx$ ja määritettävän alueen pinta-ala saadaan ”äärettömänä summana” (integraalina)

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

On kuitenkin huomattava, että tällä kurssilla ei infinitesimaalien käsitettä ole täsmennetty millään tavalla ja täten edellämainittu viittaus infinitesimaalilaskentaan on tarkoitettu lähinnä intuitioon perustuvaksi muistisäännöksi. Muut tämän kurssin geometriset sovellukset esitetään infinitesimaalilaskennan tavalla ja tyydytään vain toteamaan, että tämä käytäntö voitaisiin perustella täsmällisesti Riemann-summien avulla.

Määritelmä 26. Välillä $[a,b]$ integroituvan funktion f *keskiarvo* määritellään lausekkeena

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Määritelmän motivaatiota varten on hyödyllistä tarkastella tapausta $f(x)>0$ ja piirtää näkyviin suorakulmio, jonka kanta on $b-a$ ja pinta-ala sama, joka jää käyrän $y=f(x)$, x-akselin ja suorien $x=a$ ja $x=b$ väliin.

7.2 Kaarenpituus: Parametrimuoto

Määritelmä 27. Käyrä tasossa $\mathbb{R}^2$ funktio $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$, missä I on jokin reaalilukuväli. Yhtäpitävästi voidaan käyrä määritellä parametrimuotoisena relaationa $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$.

Edellisen määritelmän mukaisella tavalla esitettyä käyrää sanotaan *parametrimuotoiseksi*. Jokainen funktio $f : I \to \mathbb{R}$ määrittelee myös käyrän (ns. xy-muoto), josta saadaan parametrimuoto asettamalla $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$.

Määritelmä 28. Käyrä $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a,b]\}$ on *jatkuva* mikäli funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvia. Lisäksi sanotaan, että käyrä Γ on *sileä*, mikäli myös $x'(t)$ ja $y'(t)$ ovat jatkuvia.

Olkoon $I = [a,b]$ ja oletetaan, että Γ on sileä käyrä. Selvitetään käyrän $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ pituus infinitesimaalilaskennan ajatustavalla. Merkitään "äärettömän pientä" käyrän osaa ds:llä, jolloin käyrän pituus L on "ääretön" summa (integraali) yli kaikkien "äärettömän pienten" käyrän osien:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

Infinitesimaalisen käyrän alkion tulisi toteuttaa yhtälö $ds^2 = dx^2 + dy^2$, jolloin käyrän pituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \qquad (7.1)$$

Sanotaan, että käyrä on *suoristuva*, mikäli sillä on äärellinen pituus.

Esimerkki 67. Sykloidi määritellään parametriesityksellä

$$\begin{cases} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t, \end{cases}$$

missä $t \in [0, 2\pi]$. Tällöin $x'(t) = 1 - \cos t$ ja $y'(t) = \sin t$. Sykloidin kaarenpituudeksi saadaan siis kaavan (7.1) mukaan

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt \\ &= 2 \Big/_0^{2\pi} (-2)\cos \frac{t}{2} = 2(2 - (-2)) = 8. \end{aligned}$$

Yllä on käytetty trigonometrista kaavaa $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ (yhtäpitävästi $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$) kolmatta yhtäsuuruutta varten.

7.3 Kaarenpituus: xy-muoto

Jos käyrä on annettu muodossa $y = f(x)$, saadaan tästä parametrimuoto välittömästi asettamalla $x = t$, $y = f(t)$. Tällöin $x'(t) = 1$ ja $y'(t) = f'(t)$ ja siis kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \qquad (7.2)$$

Esimerkki 68. Lasketaan käyrän $y = f(x) = \ln x$ pituus välillä $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$. Koska $f'(x) = \frac{1}{x}$, saadaan kaavan (7.2) mukaan

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx.$$

Funktion $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ kantafunktion löytämiseksi tehdään sijoitus $x = \tan t$, jolloin

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt,$$

mikä puolestaan suoralla laskulla saadaan muotoon

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx = \int \frac{1}{\sin t \cos^2 t}\, dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt + \int \frac{1}{\sin t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\cos t} + \ln \frac{1 - \cos t}{\sin t}.$$

Viimeisin summattava voidaan perustella seuraavalla laskutoimituksella:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \frac{\sin^2 t - (1 - \cos t)\cos t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Jotta voitaisiin palata alkuperäiseen muuttujaan $x = \tan t$, voidaan laskea $x^2 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$, josta $\cos^2 t = \frac{1}{x^2+1}$ ja edelleen $\sin^2 t = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$. Näin ollen

$$\frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\tan t} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$$

ja näin saadaan funktion $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ kantafunktioksi (kun $x > 0$)

$$\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}.$$

(Tarkasta derivoimalla onko tämä todella funktion $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ kantafunktio). Tällöin

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx = \Big/_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} (\sqrt{x^2+1} + \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}) = 1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}20273.$$

7.4 Tilavuus

Kolmiulotteisessa avaruudessa tilavuuden määrittäminen tapahtuu yleensä kolmen muuttujan funktion integraalin avulla, mutta joissakin tapauksissa tilavuus voidaan kahden tai erittäin säännöllisten kappaleiden tapauksessa jopa yhden muuttujan funktion integraalin avulla.

Yhden muuttujan integraaliin voidaan toisinaan päästä seuraavalla tavalla: Ajatellaan, että tasojen $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävästä kappaleesta tunnetaan x-akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen ala $A(x)$ kussakin pisteessä x. Kappale oletetaan sellaiseksi, että funktio $A(x)$ on jatkuva välillä $[a,b]$.

Infinitesimaalilaskennan näkökulmasta katsoen tällöin ajateltaisiin, että välillä $[a,b]$ kappale jaetaan äärettömän moneen ”äärettömän ohueeseen” viipaleeseen, joista kunkin tilavuus on $A(x)\, dx$ ($x \in [a,b]$), ja tällöin koko kappaleen tilavuus saadaan integraalina

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Esimerkki 69. Tarkastellaan kartiota, jonka korkeus on h ja pohjan ala A. Asetetaan koordinaatisto siten, että kartion kärki on origossa ja pohja kohtisuorassa x-akselia vastaan. Tällöin siis kartion pohja on osa tasoa $x = h$.

Yhdenmuotoisten alojen suhde on sama kuin mittakaavan neliö, joten x-akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen ala $A(x)$ pisteessä $x \in [0,h]$ toteuttaa $\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, siis $A(x) = \frac{A}{h^2}x^2$. Tällöin kartion tilavuus on

$$V = \int_0^h \frac{A}{h^2}x^2\,dx = \frac{A}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{A}{h^2}\Big/_0^h \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}Ah.$$

Oletetaan, että käyrä $y = f(x)$ on x-akselin yläpuolella välillä $[a,b]$ ja tarkastellaan *pyöräyskappaletta*, joka piirtyy käyrän pyörähtäessä x-akselin ympäri. Tällöin x-akselia vastaan kohtisuoran leikkauksen pinta-ala $A(x) = \pi f(x)^2$ ja siis tasojen $x = a$ ja $x = b$ rajoittama tilavuus on

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Esimerkki 70. Ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pyörähtäessä x-akselin ympäri piirtyy *pyöräysellipsoidi*. Tämän tilavuus on

$$\pi\int_{-a}^a y^2\,dx = 2\pi b^2\int_0^a (1 - \frac{x^2}{a^2})\,dx = 2\pi b^2\Big/_0^a (x - \frac{x^3}{3a^2}) = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Erikoistapauksessa $a = b = r$ saadaan r-säteisen pallon tilavuudeksi.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Luku 8
Integraalikäsitteen laajennuksia

Riemann-integraali määriteltiin alun perin vain siinä tapauksessa, että integrointiväli on äärellinen ja integrandi rajoitettu. Molemmista rajoitteista voidaan toisinaan luopua, jolloin päädytään niin kutsuttuihin *epäoleellisiin* integraaleihin. Sovellusten kannalta nämä yleistykset ovat ainakin yhtä merkittäviä kuin varsinaiset Riemann-integraalit, ja niistä käytetään samankaltaisia merkintöjä kuin varsinaisista integraaleistakin.

8.1 I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä 29. Olkoon f integroituva välin $[a,\infty)$ jokaisella äärellisellä osavälillä $[a,M]$. Määritellään

$$\int_a^\infty f = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f,$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa äärellisenä. Tällöin sanotaan, että *I lajin epäoleellinen integraali suppenee.* Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan, että integraali *hajaantuu*. Integraalin hajaantuessa merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow,$$

ja suppenevassa tapauksessa merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin $\int_{-\infty}^\infty f$ määritelmää tarkastellaan myöhemmin.

Esimerkki 71. Selvitetään, suppeneeko $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_0^M xe^{-x}\,dx = \int_0^M x\frac{d}{dx}(-e^{-x})\,dx = \Big/_0^M -xe^{-x} + \int_0^M e^{-x}\,dx$$

$$= -Me^{-M} - \Big/_0^M e^{-x} = -Me^{-M} - e^{-M} + 1,$$

mistä nähdään, että

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M xe^{-x}\,dx = 1.$$

Siis tarkasteltava epäoleellinen integraali suppenee, ja sen arvo on 1.

Esimerkki 72. Integraali $\int_0^\infty \cos x\,dx$ hajaantuu, sillä

$$\int_0^M \cos x\,dx = \Big/_0^M \sin x = \sin M,$$

eikä raja-arvoa $\lim_{M\to\infty} \sin M$ ole olemassa.

Esimerkki 73. Olkoon $a > 0$ ja tarkastellaan integraalin

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenemista s:n eri arvoilla. Merkitään $I(M) = \int_a^M \frac{1}{x^s}\,dx$ ja tarkastellaan mitä tapahtuu, kun M lähenee ääretöntä. Jos $s \neq 1$, on $\frac{d}{dx}\frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}} = \frac{1}{x^s}$ ja

$$I(M) = \frac{1}{1-s}\Big(\frac{1}{M^{s-1}} - \frac{1}{a^{s-1}}\Big),$$

mistä nähdään, että

$$\lim_{M\to\infty} I(M) = \begin{cases} -\frac{1}{1-s}\frac{1}{a^{s-1}}, & \text{jos } s > 1, \\ \infty, & \text{jos } s < 1. \end{cases}$$

Tapauksessa $s = 1$ saadaan

$$I(M) = \int_a^M \frac{1}{x^s}\,dx = \Big/_a^M \ln x = \ln M - \ln a,$$

joten $\lim_{M\to\infty} I(M) = \infty$. Näin ollen epäoleellinen integraali $\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee tarkalleen silloin kun $s > 1$ ja tällöin

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1}a^{1-s}.$$

Huomautus 27. Epäoleellisten integraalien yhteydessä käytetään toisinaan lyhyyden vuoksi sijoitusmerkintää

$$\Big/_a^\infty f(x),$$

mikä tarkoittaa raja-arvoa

$$\lim_{M\to\infty} \Big/_a^M f(x).$$

Epäoleellisen integraalin suppenemiskysymystä on usein melko hankala ratkaista. Tähän liittyen tarkastellaan seuraavaksi joitakin *suppenemiskriteerejä*, mutta ensiksi voidaan todeta seuraavat epäoleellista integraalia koskevat seikat:

Lause 40. *Oletetaan, että $\int_a^M f$ on olemassa kaikille $M > a$.*
Jos integraali $\int_a^\infty f$ suppenee ja $b > a$, niin myös $\int_b^\infty$ suppenee ja

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 41.
$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$
mikäli jälkimmäiset integraalit supenevat.

Todistus. Seuraa suoraan raja-arvojen laskusäännöistä, harjoitustehtävä.

Lause 42 (Vertailutarkastin). *Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$ (M on jokin positiiviluku) ja f sekä g integroituvia jokaisella välillä $[a,b]$. Tällöin*

1. *Jos $\displaystyle\int_a^\infty g$ suppenee, niin myös $\displaystyle\int_a^\infty f$ suppenee.*
2. *Jos $\displaystyle\int_a^\infty f$ hajaantuu, niin myös $\displaystyle\int_a^\infty g$ hajaantuu.*

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 28. Edellisen lauseen tilanteessa sanotaan, että f on g:n *minorantti* ja että g on f:n *majorantti*. Suppenevasta majorantista seuraa siis suppeneminen, ja hajaantuvasta minorantista hajaantuminen.

Esimerkki 74. Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$. Todetaan, että
$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$
Esimerkin 73 mukaan integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ suppenee, joten lauseen 42 mukaan myös tarkasteltava integraali suppenee.

Vaikka tarvittava majorantti tai minorantti olisikin saatavilla, saattaa silti vertailu olla työlästä.

Esimerkki 75. Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$. Integrandille on helppo löytää minorantti: $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, kun $x \in [2,\infty)$. Edelleen todetaan, että $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ suppenee, mutta minoranttifunktion integraalin suppeneminen ei kuitenkaan johda alkuperäisen integraalin suppenemiseen.

Toisaalta integrandille saadaan myös majorantti: Kun $x \geq 2$, on
$$\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^3}}} = \sqrt{\frac{8}{7}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$
sillä funktio $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}$ on vähenevä välillä $[2,\infty)$.

Koska integraali $\displaystyle\int_2^\infty \sqrt{\frac{8}{7}}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \sqrt{\frac{8}{7}}\int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ suppenee, suppenee myös alkuperäinen integraali majoranttiperiaatteen perusteella.

Seuraavaksi esitettävä vertailutarkastimen raja-arvomuoto on yleensä helppokäyttöisempi kuin edellä esitetty tapa löytää majorantti. On kuitenkin huomattava, että raja-arvomuodon todistus perustuu samaan ajatukseen kuin ylläoleva tapa.

Lause 43. *Oletetaan, että f ja g ovat positiivisia jostain rajasta lähtien ja* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. *Tällöin*

1. *Jos $L = 0$, niin integraalin $\int_a^\infty g$ suppenemisesta seuraa integraalin $\int_a^\infty f$ suppeneminen.*
2. *Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_a^\infty g$ suppenee.*
3. *Jos $L = \infty$, niin integraalin $\int_a^\infty g$ hajaantumisesta seuraa integraalin $\int_a^\infty f$ hajaantuminen.*

Todistus. Väitteiden 1. ja 3. todistus jätetään harjoitustehtäväksi ja todistetaan väite 2.

Oletetaan siis, että $0 < L < \infty$. Raja-arvon määritelmän mukaan $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right|$ saadaan miten pieneksi hyvänsä, kunhan x on kyllin suuri. Erityisesti $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le \frac{L}{2}$, kunhan x valitaan riittävän suureksi. Tällaisilla x:n arvoilla on siis $\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$, joten $\frac{3L}{2} g(x)$ on $f(x)$:n majorantti ja samoin $\frac{2}{L} f(x)$ on $g(x)$:n majorantti. Jos siis jompi kumpi integraaleista $\int_a^\infty f$ ja $\int_a^\infty g$ suppenee, suppenee toinenkin.
□

Esimerkki 76. Tarkastellaan integraalin $\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2}\, dx$ suppenemista. otetaan vertailufunktioksi x^{s-2}, jolloin huomataan, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^s}{1+x^2}}{x^{s-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Tällöin siis tarkasteltava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2-s}}\, dx$ suppenee. Esimerkin 73 mukaan viimeksi mainittu integraali suppenee tarkalleen silloin, kun $2 - s > 1$, mikä on yhtäpitävää ehdon $s < 1$ kanssa.

Vertailutarkastimen kummassakin muodossa oletettiin, että tarkasteltavat funktiot ovat ei-negatiivisia ainakin jostain rajasta lähtien. Tällöin jää avoimeksi miten äärettömän monta kertaa merkkiään vaihtavan funktion tapauksessa voidaan toimia, mutta tällaisiin tapauksiin voidaan toisinaan soveltaa seuraavaa lausetta.

Muistetaan aluksi, että kun $M \ge a$, niin *integraalilaskennan kolmioepäyhtälön* mukaan

$$\left|\int_a^M f(x)\, dx\right| \le \int_a^M |f(x)|\, dx,$$

eikä tämän perusteella seuraavan lauseen tulos ole kovinkaan yllättävä.

Lause 44. *Jos integraali $\int_a^\infty |f|$ suppenee, niin myös integraali $\int_a^\infty f$ suppenee.*

Todistus. Joka tapauksessa pätee $0 \le f + |f| \le 2|f|$, joten majoranttiperiaatteen mukaan integraali $\int_a^\infty (f + |f|)$ suppenee. Näin ollen myös integraali $\int_a^\infty f = \int_a^\infty (f + |f|) - \int_a^\infty |f|$ suppenee. □

On kuitenkin mahdollista, että $\int_a^\infty f$ suppenee, mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu. Tällöin sanotaan, että $\int_a^\infty f$ *suppenee ehdollisesti*. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee (jolloin siis myös $\int_a^\infty f$ suppenee) sanotaan, että $\int_a^\infty f$ *suppenee itseisesti*.

Esimerkki 77. Integraali $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ suppenee itseisesti, sillä itseisarvolla $\frac{|\sin x|}{x^2}$ on majorantti $\frac{1}{x^2}$ ja $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ suppenee.

Esimerkki 78. On mahdollista todistaa, että $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ suppenee ja että $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ hajaantuu.

Matlabin symbolisen matematiikan työkalun avulla voidaan myös määrittää joidenkin epäoleellisten integraalien arvoja:

```
>> syms x
>> f=exp(-x^2)

f =

exp(-x^2)

>> int(f,x,-inf,inf)

ans =

pi^(1/2)
```

8.2 II lajin epäoleellinen integraali

Edellä laajennettiin Riemann-integraalin käsite tapauksiin, joissa integroimisväli ei ole äärellinen. Analogisesti voidaan integraalikäsite laajentaa tapauksiin, joissa integrandi ei ole rajoitettu.

Määritelmä 30. Olkoon f integroituva jokaisella välin $[a,b]$ osavälillä $[a,b-\varepsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b-\varepsilon,b)$ ($\varepsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Tällöin integraalin $\int_a^b f$ sanotaan *suppenevan*, muutoin *hajaantuvan*.

Vastaavasti määritellään $\int_a^b f$ tapauksessa, jossa f on rajoitettu väleillä $[a+\varepsilon,b]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[a,a+\varepsilon)$. Tällöin määritellään siis

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f,$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Integraaleja, joissa integrandi ei ole rajoitettu, sanotaan *II lajin epäoleellisiksi integraaleiksi*.

Esimerkki 79. Tarkastellaan integraalin $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$ suppenemista. Jos $s \le 0$, on integrandi rajoitettu koko integroimisvälillä, joten kyseessä on tavallinen Riemann-integraali. Jos taas $s > 0$, on integraali epäoleellinen, koska se ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä. Suppenemiskysymystä on siis mielekäs tarkastella vain, kun $s > 0$.

Oletetaan siis että $s > 0$ ja merkitään

$$I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx,$$

jolloin saadaan

$$I(\varepsilon) = \begin{cases} \ln \frac{b-a}{\varepsilon}, & \text{kun } s = 1 \\ \frac{1}{1-s}((b-a)^{1-s} - \varepsilon^{1-s}), & \text{kun } s \neq 1 \end{cases}$$

Tästä nähdään, että tapauksessa $s = 1$ $\lim_{\varepsilon \to 0+} I(\varepsilon) = \infty$ ja että $\lim_{\varepsilon \to 0+} I(\varepsilon) = \infty$, mikäli $s > 1$. Tapauksessa $0 < s < 1$ sen sijaan $\lim_{\varepsilon \to 0+} I(\varepsilon) = \frac{1}{1-s}(b-a)^{1-s}$, joten siis integraali $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$ suppenee tarkalleen silloin, kun $s < 1$ ja tällöin sen arvo on $\frac{1}{1-s}(b-a)^{1-s}$.

Huomautus 29. Soveltamalla ylläolevan esimerkin menettelyä voidaan todeta että ylärajaltaan epäoleellinen integraali

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^s}\,dx$$

suppenee tarkalleen silloin kun $s < 1$ ja tällöin integraalin arvo on $\frac{1}{1-s}(b-a)^{1-s}$.

I lajin epäoleellista integraalia koskevat tulokset voidaan muotoilla myös II lajin epäoleellisille integraaleille. Itse asiassa II lajin integraalit voidaan sopivin sijoituksin muuntaa I lajin integraaleiksi.

Esimerkki 80. Tehdään integraaliin $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}$ sijoitus $x = \frac{1}{t}$, jolloin $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ ja siis

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 \frac{1}{(1/t)^s}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t^{2-s}}\,dt.$$

Luvun ε lähetessä nolla pitkin positiivista x-akselia luku $M = \frac{1}{\varepsilon}$ lähenee ääretöntä. Tällöin

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^{2-s}}\,dx,$$

joten integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2-s}}\,dx$ suppenee. Esimerkin 79 mukaan ensimmäinen integraali suppenee, kun $s < 1$ ja esimerkin 73 mukaan jälkimmäinen integraali suppenee, kun $2 - s > 1$. Ehdot $s < 1$ ja $2 - s > 1$ ovat yhtäpitävät, kuten helposti todetaan.

Edellisen esimerkin sijoituksella voidaan vertailutarkastin kääntää suoraan koskemaan II lajin integraaleja. Vertailutarkastimen raja-arvomuodossa tulee tietenkin laskea raja-arvo $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ tai $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ riippuen siitä, kummassa päässä integrointiväliä $[a, b]$ f ei ole rajoitettu.

Esimerkki 81. Tutkitaan integraalin $\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)}\,dx$ suppenemista eri s:n arvoilla. Kyseisessä integraalissa epäoleellisuuden aiheuttaa se, että funktio ei ole rajoitettu origon ympäristössä. Origon ympäristössä taas tekijä $\frac{x+1}{x^2+1}$ on lähellä ykköstä, joten integrandi muistuttaa funktiota $\frac{1}{x^s}$, kun x on lähellä nollaa. Tällöin kannattaa valita $\frac{1}{x^s}$ vertailuintegrandiksi. Todetaan, että

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x+1}{x^s(x^2+1)}}{\frac{1}{x^s}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x+1}{x^2+1} = 1,$$

joten tutkittava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ suppenee, mikä taas tapahtuu tarkalleen silloin kun $s < 1$.

Esimerkki 82. Integraalissa $\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ epäolennaisuus ilmenee alarajalla: tällöin nimittäjä lähenee nollaa ja integrandi ei siis ole rajoitettu nollan lähistöllä. Voidaan kuitenkin todeta, että

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + x + O(x^2) - 1} = \frac{1}{x + O(x^2)},$$

joten vertailuintegrandiksi kannattaa valita $\frac{1}{x}$. Todetaan, että

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+x+O(x^2)-1}{x} = 1,$$

joten integraalien $\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$ ja $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ suppenemiskäyttäytyminen on samanlainen. Koska jälkimmäinen integraali hajaantuu esimerkin 79 perusteella, hajaantuu myös edellinenkin.

8.3 Yleinen epäoleellinen integraali

Yhdistelemällä I ja II lajin epäolennaisia integraaleja saadaan ainakin seuraavaa tyyppiä olevia integraaleja:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f$, kun f on rajoitettu koko $\mathbb{R}$:ssä
- $\int_{-\infty}^{\infty} f$, kun f ei ole rajoitettu pisteessä c.
- $\int_a^b f$, kun f ei ole rajoitettu a:n ja b:n ympäristössä.
- $\int_a^b f$, kun f ei ole rajoitettu pisteessä $c \in (a,b)$.

Yleinen periaate ylläolevien (ja muiden vastaavien) integraalien tarkastelussa on jakaa integrointiväli sellaisiin osiin, että kullakin osavälillä esiintyy vain yksi epäoleellisuus.

Yleisesti integraali yli reaaliakselin määritellään seuraavasti, mutta tästä määritelmästä poiketaan Fourier-analyysin yhteydessä.

Määritelmä 31. Olkoon f rajoitettu koko $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f$ suppenee, mikäli integraalit $\int_{-\infty}^{0} f$ ja $\int_0^{\infty}$ molemmat suppenevat. Tällöin määritellään

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \lim_{M\to\infty} \int_0^M f$$

Huomautus 30. Edellisen määritelmän mukaan N ja M lähenevät ääretöntä toisistaan riippumatta. Joissakin tapauksissa raja-arvo

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f \tag{8.1}$$

voi olla olemassa, vaikka integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f$ hajaantuisikin. Raja-arvoa (8.1) kutsutaan integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ *Cauchyn pääarvoksi.* Fourier-analyysissä integraali yli reaaliakselin määritellään nimenomaan Cauchyn pääarvona.

Esimerkki 83. Helposti todetaan, että $\int_{-M}^{M} x\,dx = \Big/_{-M}^{M} \frac{1}{2}x^2 = 0$, joten myös $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f = 0$. Kuitenkaan kumpikaan integraaleista $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ tai $\int_0^{\infty} x\,dx$ ei suppene, kuten helposti todetaan.

Esimerkki 84. Tarkastellaan todennäköisyyslaskennassa esiintyvää integraalia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Ensiksi hajotetaan integraali kahdeksi osaksi:

$$\int_{-N}^{M} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-N}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_{0}^{M} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

minkä jälkeen ensimmäiseen osaan sijoitetaan $x = -t$, jolloin saadaan

$$\int_{-N}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{N}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}(-1)\,dt = \int_{0}^{N} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Näin ollen suppenemiskysymystä tarkasteltaessa riittää tutkia, suppeneeko integraali $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. Koska $e^{-\frac{x^2}{2}}$ on kaikkialla jatkuva funktio, on tällöin

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

mikäli viimeisin integraali suppenee. Täten siis riittää tarkastella integraalin $\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ suppenemista.

Valitaan vertailuintegrandiksi $\frac{1}{x^2}$ ja todetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Esimerkin 73 mukaan $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ suppenee, joten vertailutarkastimen perustella myös $\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ suppenee. Näin ollen siis myös integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

suppenee. Usean muuttujan integraalilaskentaa käyttäen voidaan itse asiassa osoittaa että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Esimerkki 85. Tarkastellaan integraalin

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s\sqrt{(1-x)^{4s-1}}}\,dx$$

suppenemista. Kun x on lähellä nollaa, on integrandi likimain lausekkeen $\frac{1}{x^s}$ suuruinen, kun taas lähellä pistettä $x = 1$ integrandi muistuttaa lauseketta $\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}}$. Täten siis integraalilla on kaksi epäoleellisuuskohtaa, ja suppenemistarkastelu voidaan siis jakaa integraaleihin

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^s\sqrt{(1-x)^{4s-1}}}\,dx \text{ ja } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^s\sqrt{(1-x)^{4s-1}}}\,dx.$$

Vertailuintegrandia $\frac{1}{x^s}$ käyttäen voidaan todeta, että ensimmäinen integraali suppenee tarkalleen silloin, kun $s < 1$ ja vertailuintegrandi $\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{4s-1}{2}}}$ paljastaa, että jälkimmäinen integraali suppenee tarkalleen silloin, kun $\frac{4s-1}{2} < 1$, mikä on yhtäpitävää ehdon $s < \frac{3}{4}$ kanssa. Täten siis tarkasteltava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $s < \frac{3}{4}$.

Esimerkki 86. Tarkastellaan integraalin $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^s+1)}\,dx$ suppenemista ja sitä varten jaetaan integraali ensiksi kahteen osaan: Aluksi tarkastellaan osan

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x^s+1)}\,dx \tag{8.2}$$

suppenemista. Tässä integrandi muistuttaa nollan lähistöllä funktiota $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ja käyttäen tätä funktiota vertailuintegrandina on helppo todentaa, että integraali 8.2 suppenee s:n arvosta riippumatta.

Jäljelle jää integraalin $\int_1^\infty f$ suppenemisen selvittäminen, ja tällöin tulee arvioida integrandia, kun x on suuri. Suurilla x:n arvoilla integrandi muistuttaa funktiota $\frac{1}{\sqrt{x}x^s} = \frac{1}{x^{s+\frac{1}{2}}}$, ja tätä vertailuintegrandina käyttäen voidaan raja-arvotarkastimen avulla todeta, että tutkittava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $s + \frac{1}{2} > 1$, mikä toteutuu tarkalleen silloin kun $s > \frac{1}{2}$.

8.4 Integraalin määrittelemistä funktioista

Hyvin usein esiintyvässä tilanteessa funktio määritellään muiden funktioiden summana:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} g(i,x).$$

Jos esimerkiksi $g(i,x) = c_i x^i$, esittää yllä oleva summa yleistä polynomifunktiota. Vastaavasti on mahdollista esittää funktioita integraalina: esimerkiksi funktiot $g(t,x)$ ($t \in [a,b]$) voivat yhdessä määritellä funktion f seuraavasti:

$$f(x) = \int_a^b g(t,x)\,dt$$

Tällaisissa integraaleissa muuttujaa x kutsutaan *parametriksi*.

Tarkastellaan integraalin määrittelemiä funktiota menemättä itse teoriaan. Määritellään ns. *Gammafunktio* kaavalla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

ja selvitetään millä x:n arvoilla kyseinen integraali suppenee. Aluksi todetaan, että jos $x \geq 1$, on integraali epäoleellinen vain ylärajalla, mutta tapauksessa $x < 1$ integraali on epäoleellinen myös alarajalla.

Tarkastellaan siis aluksi integraalin

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt \tag{8.3}$$

suppenemista. Valitaan vertailuintegrandiksi $\frac{1}{t^{1-x}}$, jolloin voidaan todeta, että

$$\lim_{t\to 0+} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = 1.$$

Täten siis integraali (8.3) suppenee tarkalleen silloin kuin

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt \tag{8.4}$$

suppenee, ja esimerkin 79 mukaan (8.4) suppenee tarkalleen silloin kun $1 - x < 1$, mikä on yhtäpitävää ehdon $x > 0$ kanssa.

Tarkastellaan sitten integraalin

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

suppenemista. Tässä yhteydessä vertailuintegrandiksi voidaan valita esimerkiksi $\frac{1}{t^2}$, jolloin todetaan, että

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Koska integraali $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ suppenee, suppenee siis myös integraali $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ vertailutarkastimen nojalla. Täten voidaan siis todeta, että integraali

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

suppenee tarkalleen silloin, kun $x > 0$.

Lause 45. *Kun $x > 0$, on $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Todistus. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_\varepsilon^M t^x e^{-t}\,dt = -\Big/_{\!\varepsilon}^{M} t^x e^{-t} + \int_\varepsilon^M x t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

mistä väite seuraa, kun annetaan M:n lähestyä ääretöntä ja ε:in nollaa. $\square$

Helposti todetaan, että

$$\Gamma(1) = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-t}\,dt = \lim_{M\to\infty}\Big/_{\!0}^{M} -e^{-t} = \lim_{M\to\infty} -e^{-M} + 1 = 1,$$

joten kokonaisluvuille n pätee

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\ldots\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!$$

Gammafunktio $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ voidaan täten siis nähdä kertomafunktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yleistyksenä.

Määritetään seuraavaksi arvo $\Gamma(\frac{1}{2})$ ja oletetaan tätä varten tunnetuksi integraali $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Tällöin

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{M\to\infty}\int_0^M t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt,$$

ja sijoitus $t = \frac{x^2}{2}$ antaa

$$\int_0^M t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = \int_0^{\sqrt{2M}} \frac{\sqrt{2}}{x}e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot x\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2M}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx,$$

mistä nähdään, että $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Matlab tuntee myös Γ-funktion:

```
>> gamma(1/2)

ans =

    1.7725

>>
```

Lause 46. *Oletetaan, että funktio $f(x,t)$ ja osittaisderivaatta $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ ovat jatkuvia, kun $x \in [c,d]$ ja $t \in [a,b]$. Tällöin*

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt,$$

kun $t \in [a,b]$.

Todistus. Sivuutetaan.

Esimerkki 87.

$$\frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{\sin tx}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin tx}{x}\,dx = \int_1^2 \cos tx\,dx = \frac{1}{t}(\sin 2t - \sin t).$$

Voidaan osoittaa, että edellinen lause pätee myös epäoleellisille integraaleille, mikäli suppeneminen täyttää tietyn säännöllisyysehdon.

Esimerkki 88.

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t})\,dt = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt,$$

ja voidaan osoittaa, että näin saatu integraali suppenee samoilla x:n arvoilla kuin alkuperäinenkin.