Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

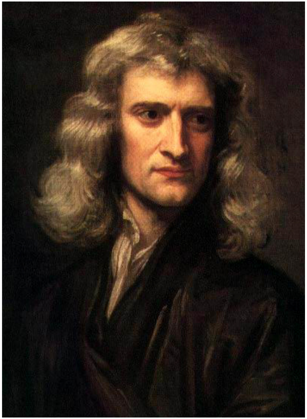
Historiaa

Arkhimedes (n. 287–212 eKr)
Määritti pinta-aloja ja tilavuuksia itse kehittämänsä varhaisen integraalilaskennan avulla

Historiaa

René Descartes (Renatus Cartesius, 1596–1650)
Geometrian ja algebran yhdistäminen.

Historiaa



Sir Isaac Newton (1642–1727)
Differentiaali- ja integraalilaskenta fysiikkaa varten

Historiaa

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
Differentiaali- ja integraalilaskenta "periaatteen vuoksi"

Historiaa

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
Differentiaali- ja integraalilaskennan modernisointi

Historiaa

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys
- Tekniikan kehitys
- Maailmankuvan kehitys

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä 2

Raja-arvo $k = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ on olemassa

Huomautus

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x, jos sitä voidaan x:n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Derivointisääntöjä

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I, niin $f'(x) = 0$ välillä I.

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.

Lause: Osamäärän derivaatta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}(f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\Big(-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Derivointisääntöjä

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.
Jos $k > 0$, on

$$\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \ldots + h^k - x^k \\
&= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \ldots + h^k \\
&= kx^{k-1}h + h\underbrace{\left(\binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \ldots + h^{k-1}\right)}_{\epsilon(h)}.
\end{aligned}$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.