Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Raja-arvo

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y, jos x valitaan läheltä lukua x_0.

Raja-arvo

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y, jos x valitaan läheltä lukua x_0.

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10.

Raja-arvo

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y, jos x valitaan läheltä lukua x_0.

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10. Muodollisesti tämä nähdään seuraavasti:
$d(f(x), 10) = |2x - 10| = 2\,|x - 5| = 2d(x, 5)$.

Raja-arvo

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y, jos x valitaan läheltä lukua x_0.

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10.
Muodollisesti tämä nähdään seuraavasti:
$d(f(x), 10) = |2x - 10| = 2\,|x - 5| = 2d(x, 5)$.
Jos nyt valitaan x niin läheltä lukua 5 että $d(x, 5) < \frac{1}{2}\varepsilon$, seuraa tästä että $d(f(x), 10) = 2d(x, 5) < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

Raja-arvo

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y, jos x valitaan läheltä lukua x_0.

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10. Muodollisesti tämä nähdään seuraavasti:
$d(f(x), 10) = |2x - 10| = 2\,|x - 5| = 2d(x, 5)$.
Jos nyt valitaan x niin läheltä lukua 5 että $d(x, 5) < \frac{1}{2}\varepsilon$, seuraa tästä että $d(f(x), 10) = 2d(x, 5) < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Tämä merkitsee sitä että $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua 10 kuin halutaan: Etäisyys $< \varepsilon$ kunhan x:n etäisyys luvusta 5 valitaan pienemmäksi kuin $< \frac{1}{2}\varepsilon$.

"Määritelmä 2"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat *mielivaltaisen* lähelle lukua y, jos x valitaan *riittävän* läheltä lukua x_0.

Raja-arvo

"Määritelmä 2"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat *mielivaltaisen* lähelle lukua y, jos x valitaan *riittävän* läheltä lukua x_0.

Huomautus

Attribuutti "läheltä" tarkoitaa sitä, etäisyys $d(f(x), y)$ tai $d(x, x_0)$ on pieni. "Mielivaltaisen läheltä" voidaan puolestaan ilmaista sanomalla, että kaikille $\varepsilon > 0$, etäisyys $d(f(x), y)$ toteuttaa $d(f(x), y) < \varepsilon$, kunhan x on riittävän lähellä lukua x_0, (siis kunhan $d(x, x_0)$ on riittävän pieni).

Määritelmä

Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *(avoin) ympäristö* on avoin väli (a, b), joka sisältää pisteen x_0.

Raja-arvo

Määritelmä

Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *(avoin) ympäristö* on avoin väli (a, b), joka sisältää pisteen x_0.

Raja-arvo

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_0} f(x) = y \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_\epsilon \to d(f(x), y) < \epsilon). \end{aligned}$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} y$.

Raja-arvo

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Raja-arvo

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$.

Raja-arvo

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$. Perustelu: Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $d(f(x), A) < \frac{\epsilon}{|c|}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta$

Raja-arvo

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$. Perustelu: Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $d(f(x), A) < \frac{\epsilon}{|c|}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta = \delta_{\frac{\epsilon}{|c|}}$.

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$. Perustelu: Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $d(f(x), A) < \frac{\epsilon}{|c|}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta = \delta_{\frac{\epsilon}{|c|}}$. Tällöin

$$d(cf(x), cA) = |cf(x) - cA| = |c|\,|f(x) - A| = |c|\,d(f(x), A)$$

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$. Perustelu: Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $d(f(x), A) < \frac{\epsilon}{|c|}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta = \delta_{\frac{\epsilon}{|c|}}$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(cf(x), cA) &= |cf(x) - cA| = |c|\,|f(x) - A| = |c|\,d(f(x), A) \\ &< |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon, \end{aligned}$$

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$. Perustelu: Koska $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, on $d(f(x), A) < \frac{\epsilon}{|c|}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta = \delta_{\frac{\epsilon}{|c|}}$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(cf(x), cA) &= |cf(x) - cA| = |c|\,|f(x) - A| = |c|\,d(f(x), A) \\ &< |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon, \end{aligned}$$

kunhan $d(x, x_0) \leq \delta$.

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M, että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M, että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$

Lause

Jos funktiolla f on raja-arvo $A \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0, siis $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, niin silloin funktio f on rajoitettu jossakin pisteen x_0 ympäristössä.

Raja-arvo

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M, että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$

Lause

Jos funktiolla f on raja-arvo $A \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0, siis $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, niin silloin funktio f on rajoitettu jossakin pisteen x_0 ympäristössä.

Lause

Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = A > 0$, on olemassa sellainen x_0:n ympäristö I, että $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ aina kun $x \in I$.

Lause

Olkoon $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ ja $c \in \mathbb{R}$. Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:

- $\lim_{x \to x_0} c = c$
- $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.
- $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cA$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
- Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.
- Jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ ja $\lim_{x \to y} g(x) = z$, niin $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = z$.

Esimerkkki

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{x+3} = \frac{3\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+2\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}3}$$

Esimerkkki

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x+1}{x+3} &= \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x \cdot \lim\limits_{x\to 1} x + 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 3} \\
&= \frac{3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 1}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Esimerkkki

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{x+3} = \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x\cdot \lim\limits_{x\to 1} x + 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 3}$$

$$= \frac{3\cdot 1^2+2\cdot 1+1}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Esimerkki

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}?$$

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Jos nimittäin $x > 2$, voidaan kirjoittaa $x = 2 + \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\epsilon} > 0$, ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä suurempi on $\frac{1}{\epsilon}$.

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Jos nimittäin $x > 2$, voidaan kirjoittaa $x = 2 + \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\epsilon} > 0$, ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä suurempi on $\frac{1}{\epsilon}$.
Toisaalta, jos $x < 2$ voidaan kirjoittaa $x = 2 - \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{\epsilon} < 0$ ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä pienempi on $-\frac{1}{\epsilon}$

Raja-arvokäsitteen laajennuksia

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \to f(x) > M) \end{aligned}$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön*.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \to f(x) > M) \end{aligned}$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön*.

Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin $-\infty$ sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

Esimerkki

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.
Jos siis $d(0, x) = |x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$, on $\frac{1}{x^2} > M$.

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.
Jos siis $d(0, x) = |x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$, on $\frac{1}{x^2} > M$.

Esimerkki

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}$$

ei ole olemassa myöskään äärettömänä.

Esimerkki

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2}>M$, kun $|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$.
Jos siis $d(0,x)=|x-0|=|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}=\delta_M$, on $\frac{1}{x^2}>M$.

Esimerkki

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$$

ei ole olemassa myöskään äärettömänä.
Jos olisi (∞), pitäisi olla $\frac{1}{x-2}>100$ aina, kun $d(x,2)<\delta_{100}$. Näin ei voi olla, sillä arvoilla $x<2$ on $\frac{1}{x-2}<0$.

Raja-arvokäsitteen laajennuksia

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b).

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to x_0+} f(x) = y \\
\Leftrightarrow \quad & (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(x, x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \\
& \to d(f(x), y) < \epsilon).
\end{aligned}
$$

Tällöin sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b).

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_0+} f(x) = y \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(x, x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \\ & \to d(f(x), y) < \epsilon). \end{aligned}$$

Tällöin sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$ *Vasemmanpuoleinen raja-arvo* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = y$ määritellään analogisesti ja merkitään $f(x_0-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Raja-arvokäsitteen laajennuksia

Esimerkki

$$\lim_{x \to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Jatkuvuus

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0, jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Jatkuvuus

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0, jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{jos } x \neq 2 \\ 0, & \text{jos } x = 2. \end{cases}$$

on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty reaalifunktio, ei jatkuva pisteessä $x = 2$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 1$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 1$.

Määritelmä

Funktio f on *jatkuva välillä* $I = [a, b]$, jos f on jatkuva jokaisessa I:n pisteessä.

Jatkuvuus

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 1$.

Määritelmä

Funktio f on *jatkuva välillä* $I = [a, b]$, jos f on jatkuva jokaisessa I:n pisteessä.

Esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

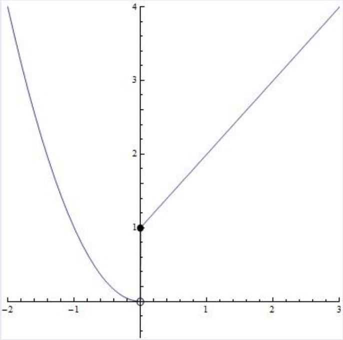
Funktio f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbb{Q}$.

Määritelmä

- Olkoon f määritelty jollakin välillä $[x_0, b)$ ja $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f *on oikealta jatkuva pisteessä* x_0.
- Olkoon f määritelty jollakin välillä $(a, x_0]$ ja $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f *on vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0.

Määritellään $f(x)$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0, \\ x+1, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$



Pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva, vasemmalta epäjatkuva.

Lause

Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I. Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Jatkuvuus

Lause

Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I. Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Muistutus

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Lause

Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I. Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Muistutus

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Lause

Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Derivaatta

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h)$$

Derivaatta

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$.

Derivaatta

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä 2

Raja-arvo $k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ on olemassa

Derivaatta

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä 2

Raja-arvo $k = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ on olemassa

Huomautus

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$.

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0.$

Määritelmä 2

Raja-arvo $k = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ on olemassa

Huomautus

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x, jos sitä voidaan x:n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Derivointisääntöjä

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I, niin $f'(x) = 0$ välillä I.

Derivointisääntöjä

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I, niin $f'(x) = 0$ välillä I.

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivointisääntöjä

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Derivointisääntöjä

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Derivointisääntöjä

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

Derivointisääntöjä

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.

Derivointisääntöjä

Lause: Osamäärän derivaatta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}(f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\Big(-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.
Jos $k > 0$, on

$$
\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \ldots + h^k - x^k \\
&= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \ldots + h^k \\
&= kx^{k-1}h + h\underbrace{\left(\binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \ldots + h^{k-1}\right)}_{\epsilon(h)}.
\end{aligned}
$$

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.
Jos $k > 0$, on

$$\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k - x^k \\
&= k x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k \\
&= k x^{k-1} h + h \underbrace{\left(\binom{k}{2} x^{k-2} h^1 + \ldots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.
\end{aligned}$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.

Derivointisääntöjä

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I, derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I, derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

"Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

Sinifunktion derivaatta

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(\sin(x+h)-\sin x) \\
= \quad & \frac{1}{h}\cdot 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2} \\
= \quad & \frac{\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h\to 0} \cos x.
\end{aligned}
$$

Derivointisääntöjä

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}?$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$$

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Implisiittimuoto

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee käyrän $\mathbb{R}^2$:ssa. Käyrän osa, jossa $y \geq 0$ määrittelee funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$.

Implisiittimuoto

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee käyrän $\mathbb{R}^2$:ssa. Käyrän osa, jossa $y \geq 0$ määrittelee funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Derivoimalla implisiittisesti saadaan

$$2x + 2yy' = 0,$$

Implisiittimuoto

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee käyrän $\mathbb{R}^2$:ssa. Käyrän osa, jossa $y \geq 0$ määrittelee funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Derivoimalla implisiittisesti saadaan

$$2x + 2yy' = 0,$$

josta

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\},$$

missä

$$f(\cos t) = \sin t,$$

josta t:n suhteen derivoimalla saadaan

$$f'(\cos t)(-\sin t) = \cos t.$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\},$$

missä

$$f(\cos t) = \sin t,$$

josta t:n suhteen derivoimalla saadaan

$$f'(\cos t)(-\sin t) = \cos t.$$

Tästä

$$f'(\cos t) = -\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Parametrimuoto

Yleisesti

$$f(x(t)) = y(t),$$

josta derivoimalla t:n suhteen saadaan

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t)$$

Parametrimuoto

Yleisesti

$$f(x(t)) = y(t),$$

josta derivoimalla t:n suhteen saadaan

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t)$$

ja siis

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Parametrimuoto

Yleisesti

$$f(x(t)) = y(t),$$

josta derivoimalla t:n suhteen saadaan

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t)$$

ja siis

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Leibnitzin merkinnöillä voidaan siis kirjoittaa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

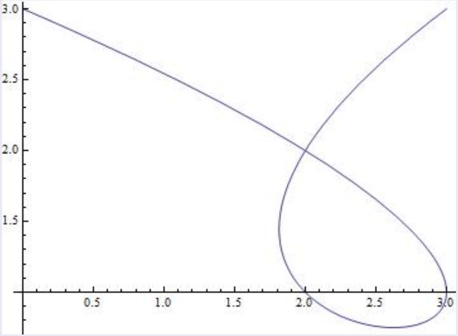
Esimerkki

$A = \{(t^3 - 2t^2 + 3, t^2 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

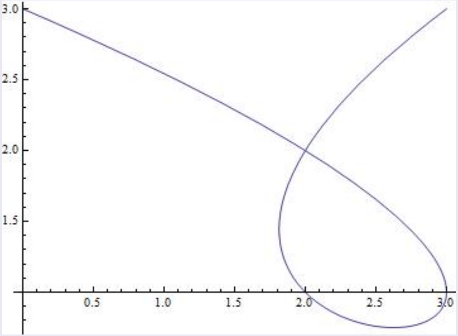
Esimerkki

$$A = \{(t^3 - 2t^2 + 3, t^2 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



Esimerkki

$A = \{(t^3 - 2t^2 + 3, t^2 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



Funktio pisteen $(2, 1)$ ympäristössä. $f'(2)$?

Esimerkki

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 3y^4 = 37$$

pisteen $(1, 2)$ ympäristössä.

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, jne.
- $D_x^2 f$, $D_{yx} f$, $D_{xy} f$, $D_y^2 f$ jne.

Esimerkki

- $D \sin x = \cos x$, $D^2 \sin x = -\sin x$, $D^3 \sin x = -\cos x$ ja $D^4 \sin x = \sin x$, $D^5 \sin x = \cos x$, jne.

Esimerkki

- $D\sin x = \cos x$, $D^2\sin x = -\sin x$, $D^3\sin x = -\cos x$ ja $D^4\sin x = \sin x$, $D^5\sin x = \cos x$, jne.
- $De^x = e^x$, $D^2e^x = e^x$, $D^3e^x = e^x$, jne.

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

Esimerkki

Jos $f(x, y) = x \sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \sin(xy) + x \cos(xy) y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \cos(xy) x + x \cos(xy) - xy \sin(xy) x$$

Esimerkki

Jos $f(x, y) = x \sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \sin(xy) + x \cos(xy) y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) &= \cos(xy) x + x \cos(xy) - xy \sin(xy) x \\ &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy). \end{aligned}$$

Useampikertaiset derivaatat

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).$$

Huomautus

Mahdollisesti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Derivointijärjestyksen voi kuitenkin vaihtaa, jos f on riittävän säännöllinen (toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia).