Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Derivointisääntöjä

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.
Jos $k > 0$, on

$$
\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k - x^k \\
&= k x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k \\
&= k x^{k-1} h + h \underbrace{\left(\binom{k}{2} x^{k-2} h^1 + \ldots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.
\end{aligned}
$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I, derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

"Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

Derivointisääntöjä

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}?$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Implisiittimuoto

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee käyrän $\mathbb{R}^2$:ssa. Käyrän osa, jossa $y \geq 0$ määrittelee funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Derivoimalla implisiittisesti saadaan

$$2x + 2yy' = 0,$$

josta

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\},$$

missä

$$f(\cos t) = \sin t,$$

josta t:n suhteen derivoimalla saadaan

$$f'(\cos t)(-\sin t) = \cos t.$$

Tästä

$$f'(\cos t) = -\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Parametrimuoto

Yleisesti

$$f(x(t)) = y(t),$$

josta derivoimalla t:n suhteen saadaan

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t)$$

ja siis

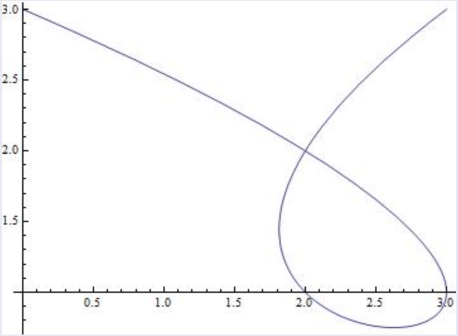
$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Leibnitzin merkinnöillä voidaan siis kirjoittaa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Esimerkki

$A = \{(t^3 - 2t^2 + 3, t^2 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



Funktio pisteen $(2, 1)$ ympäristössä. $f'(2)$?

Esimerkki

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 3y^4 = 37$$

pisteen $(1, 2)$ ympäristössä.

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, jne.
- $D_x^2 f$, $D_{yx} f$, $D_{xy} f$, $D_y^2 f$ jne.

Esimerkki

- $D \sin x = \cos x$, $D^2 \sin x = -\sin x$, $D^3 \sin x = -\cos x$ ja $D^4 \sin x = \sin x$, $D^5 \sin x = \cos x$, jne.
- $De^x = e^x$, $D^2 e^x = e^x$, $D^3 e^x = e^x$, jne.

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).$$

Useampikertaiset derivaatat

Huomautus

Mahdollisesti
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$
Derivointijärjestyksen voi kuitenkin vaihtaa, jos f on riittävän säännöllinen (toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia).

Antiderivaatta

Määritelmä

Jos $F'(x) = f(x)$, sanotaan, että $F(x)$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta (kantafunktio, primitiivifunktio, määräämätön integraali)

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n.$$

Huomautus

Jos $F(x)$ on $f(x)$:n antiderivaatta ja C vakio, on

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x),$$

joten myös $F(x) + C$ on antiderivaatta.

Antiderivaatta

Määritelmä

Funktion $f(x)$ antiderivaatoista käytetään merkintää

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

ja $f(x)$:ää kutsutaan integrandiksi.

Huomautus

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

ja

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Antiderivaatta

Huomautus

- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\;$ jos $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

Antiderivaatta

Huomautus

Tulon derivointisääntö $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ei tuota helppoa sääntöä tulon antiderivaatalle, mutta siitä seuraa, että

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Osittaisintegrointi

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Antiderivaatta

Esimerkkejä

- $\int \ln x \, dx$
- $\int x \sin x \, dx$
- $\int x^2 e^x \, dx$.