Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Antiderivaatta

Huomautus

Tulon derivointisääntö $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ei tuota helppoa sääntöä tulon antiderivaatalle, mutta siitä seuraa, että

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Huomautus

Tulon derivointisääntö $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ei tuota helppoa sääntöä tulon antiderivaatalle, mutta siitä seuraa, että

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Osittaisintegrointi

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Antiderivaatta

Esimerkkejä

- $\displaystyle\int \ln x \, dx$

Antiderivaatta

Esimerkkejä

- $\displaystyle\int \ln x \, dx$
- $\displaystyle\int x \sin x \, dx$

Antiderivaatta

Esimerkkejä

- $\displaystyle\int \ln x \, dx$
- $\displaystyle\int x \sin x \, dx$
- $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx.$

Antiderivaatta

Sijoitus määräämättömään integraaliin

Jos F on f:n antiderivaatta, on

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t),$$

josta

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)).$$

Antiderivaatta

Muistisääntö sijoitukseen

Laskettaessa antiderivaattaa

$$\int f(x)\,dx$$

voidaan sijoittaa $x = g(t)$, jolloin $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ ja siis

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Antiderivaatta

Muistisääntö sijoitukseen

Laskettaessa antiderivaattaa

$$\int f(x)\,dx$$

voidaan sijoittaa $x = g(t)$, jolloin $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ ja siis

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Esimerkki

$$\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx, \quad x = \sqrt{5}\sin t.$$

Antiderivaatta

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx?$$

Antiderivaatta

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx?$$

Derivointisääntöjä

- $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{f(x)^n} = -\dfrac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\ln|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{x^2+1}.$

Esimerkki

$$\int \frac{4x+3}{(2x^2+3x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2+3x-1} + C$$

Antiderivaatta

Esimerkki

$$\int \frac{4x+3}{(2x^2+3x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2+3x-1} + C$$

Esimerkki

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$$

Väliarvolause

Väliarvolause

Rollen lause

Jos f on välillä $[a, b]$ derivoituva ja $f(a) = f(b)$, on maksimi- tai minimikohdassa välillä $[a, b]$ voimassa $f'(\xi) = 0$.

Väliarvolause

Rollen lause

Jos f on välillä $[a, b]$ derivoituva ja $f(a) = f(b)$, on maksimi- tai minimikohdassa välillä $[a, b]$ voimassa $f'(\xi) = 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b), niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a).$$

Väliarvolause

Integraalilaskennan (antiderivaatojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Väliarvolause

Integraalilaskennan (antiderivaatojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Integraalilaskennan (antiderivaatojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Väliarvolause

Integraalilaskennan (antiderivaatojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos $a, x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Todistus

Funktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, joten se on vakio C välillä I.

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Väliarvolause

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Huomautus

Jos välillä (a, b) on $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, tai $f'(x) < 0$, voidaan vastaavasti todistaa, että funktio f on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.

Lause (l'Hospital)

Olkoon $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \to 0} 0$.

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \to 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a,x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x\to 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

Käyrän tangentti

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.
- Yksikköympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö.

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Esimerkki

Pallon sädettä kasvatetaan prosentin verran. Paljonko kasvaa tilavuus?

Määritelmä

Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Funktion kulku

Määritelmä

Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Huomautus

Jos f on derivoituva, on Rollen lauseen todistuksen perusteella ääriarvopisteissä x_0 on välttämättä $f'(x_0) = 0$.

Huomautus

Voidaan todistaa: Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, on x_0 lokaali maksimi. Jos taas $f''(x_0) > 0$, on x_0 lokaali minimi. Jos taas $f''(x_0) = 0$, ei x_0 välttämättä ole ääriarvopiste, vaan voi olla ns. satulapiste.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Vakio C määräytyy ns. alkuehdon (reunaehdon) $y(0) = y_0$ perusteella.

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Automaattisorvi

$$D(t)D'(t) = k$$

Esimerkki

- $x_0 = 510$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.752944868792959\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.752944868792959\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.729678362369799\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.752944868792959\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.729678362369799\ldots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.745388854165797\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.752944868792959\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.729678362369799\ldots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.745388854165797\ldots$
- $x_{11} = \cos x_{10} = 0.734824214649772\ldots$

Esimerkki

$$x = 0.7390851332151606416553120876 7 \ldots .$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräisratkaisut

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä (binary search)

Likimääräisratkaisut

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä (binary search)
- Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$,

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$
- $x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ voi siis olla x:ää parempi likiarvo nollakohdalle.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Esimerkki

Valitaan $N > 0$ ja sovelletaan Newtonin menetelmää funktioon $f(x) = x^2 - N$

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0,1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Likimääräisratkaisut

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0, 1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Kiintopistelause

Jos f on kutistava kuvaus välillä I, on f:llä myös kiintopiste $x_f \in I$. Mikä hyvänsä jono $x_0 \in I$, $x_{i+1} = f(x_i)$ lähestyy kiintopistettä x_f.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Likimääräisratkaisut

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Esimerkki

Newtonin menetelmän analysointi.

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Taylorin polynomit

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h$$

Derivaatta ↔ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2$$

Derivaatta ↔ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3$$

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Taylorin polynomit

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

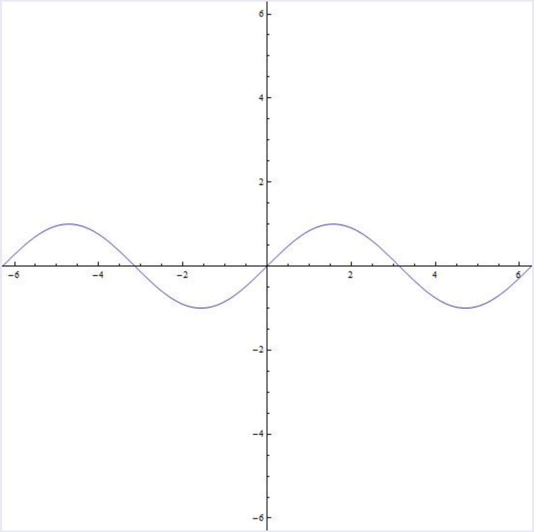
Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

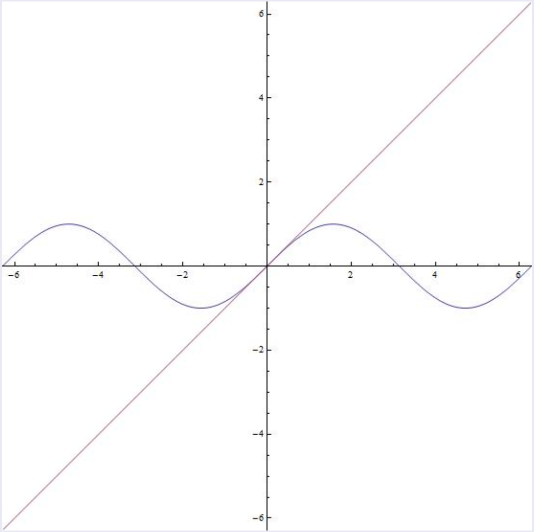
Merkitään vielä $c_0 = f(x)$, jolloin

$$f(x+h) \approx c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

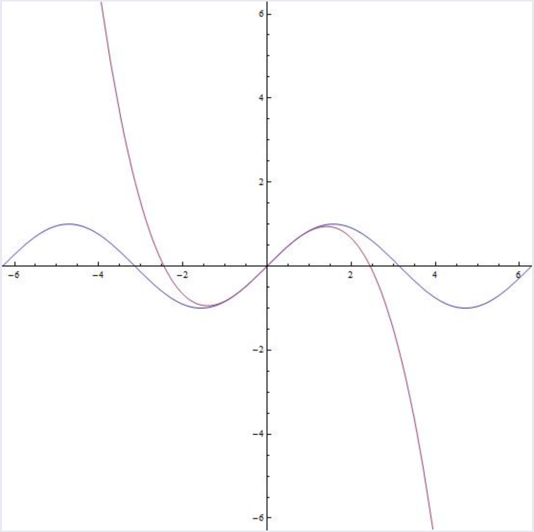
Sinifunktion approksimaatioita



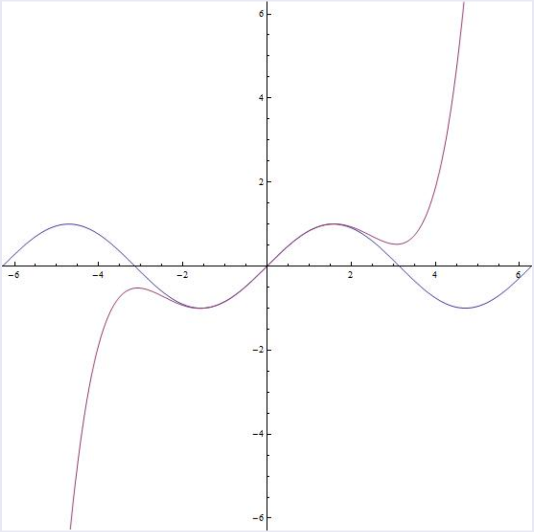
Sinifunktion approksimaatioita



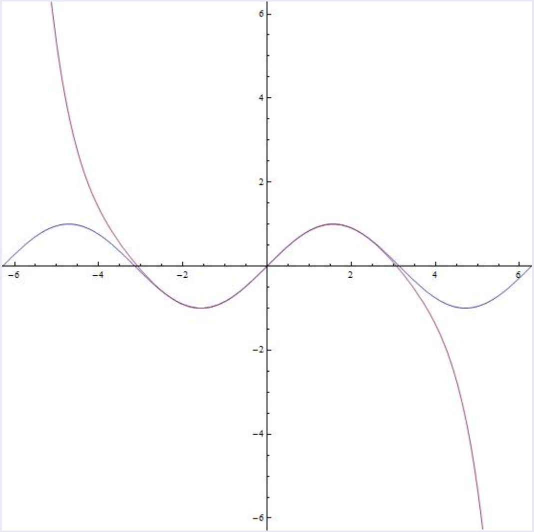
Sinifunktion approksimaatioita



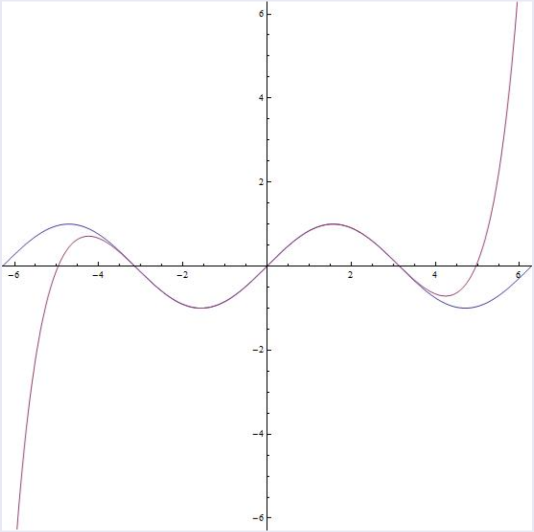
Sinifunktion approksimaatioita



Sinifunktion approksimaatioita

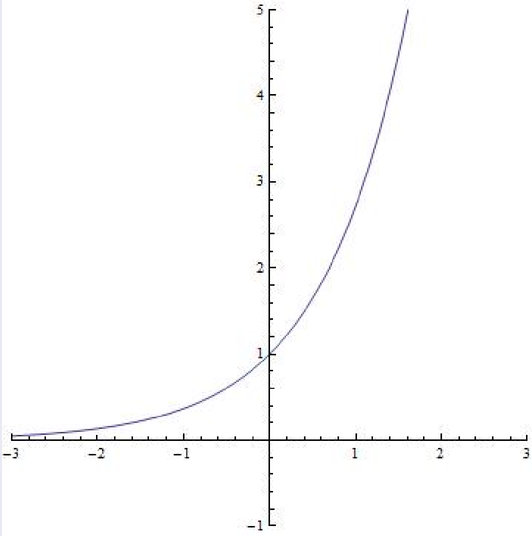


Sinifunktion approksimaatioita



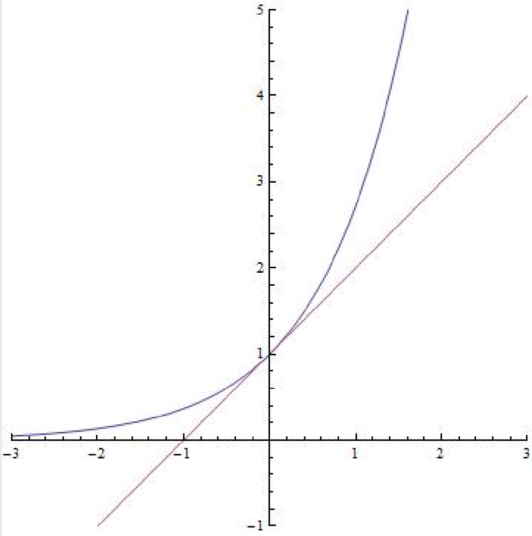
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



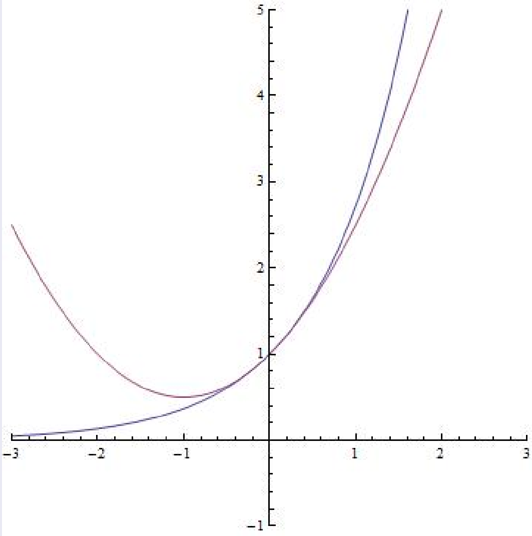
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita

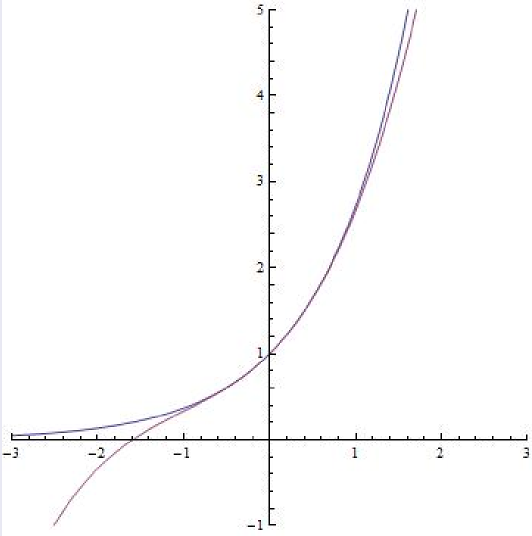


Taylorin polynomit

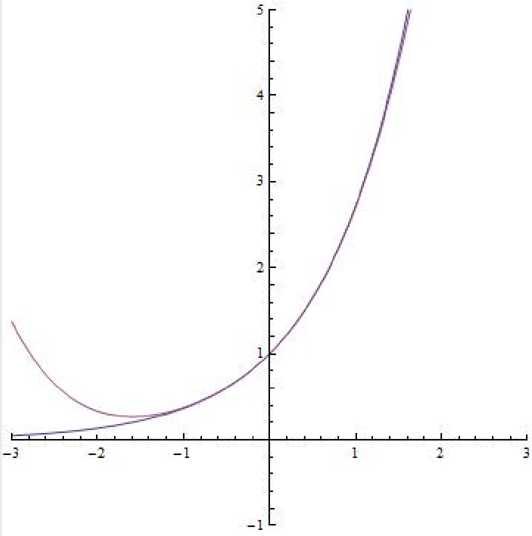
Eksponenttifunktion approksimaatioita



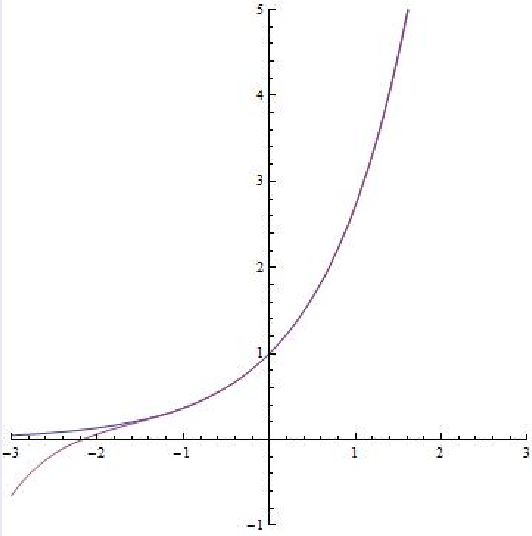
Eksponenttifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita



Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ?

Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + 5c_5 h^4 + \dots,$$

Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos
$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$
miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla
$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + 5c_5 h^4 + \dots,$$
johon sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + 5c_5 h^4 + \dots,$$

johon sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3 h + 12c_4 h^2 + 20c_5 h^3 + \dots$$

Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ...? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + 5c_5 h^4 + \dots,$$

johon sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3 h + 12c_4 h^2 + 20c_5 h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3 h + 12c_4 h^2 + 20c_5 h^3 + \ldots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$. Derivoimalla edelleen saadaan

$$f'''(x+h) = 6c_3 + 24c_4 h + 60c_5 h^2 + 120c_6 h^3 + \ldots$$

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$. Derivoimalla edelleen saadaan

$$f'''(x+h) = 6c_3 + 24c_4h + 60c_5h^2 + 120c_6h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'''(x) = 6c_3$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_n h^n + \ldots$$

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_n h^n + \ldots$$

derivoidaan n kertaa h:n suhteen, jolloin saadaan

$$f^{(n)}(x+h) = n! c_n + (n+1)! c_{n+1} h + \ldots .$$

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_n h^n + \ldots$$

derivoidaan n kertaa h:n suhteen, jolloin saadaan

$$f^{(n)}(x+h) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}h + \ldots.$$

Sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että

$$f^{(n)}(x) = n!c_n,$$

josta

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Taylorin polynomit

Määritelmä

Oletetaan, että funktiolla f on pisteessä x derivaatat n:nteen kertalukuun asti. Funktion f n:nen asteen Taylorin polynomi pisteessä x on

$$P_n(h) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

Taylorin polynomit

Määritelmä

Oletetaan, että funktiolla f on pisteessä x derivaatat n:nteen kertalukuun asti. Funktion f n:nen asteen Taylorin polynomi pisteessä x on

$$P_n(h) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

Jos $x = 0$, polynomia $P_n(h)$ kutsutaan myös Maclaurinin polynomiksi.

Taylorin polynomit

Lause

Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x+h, x)$ jos $h < 0$).

Lause

Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x+h, x)$ jos $h < 0$). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi.

Lause

Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x+h, x)$ jos $h < 0$). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi. Ylläolevaa esitystä sanotaan funktion f Taylorin kehitelmäksi pisteessä x.

Taylorin polynomit

Lause

Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x+h, x)$ jos $h < 0$). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi. Ylläolevaa esitystä sanotaan funktion f Taylorin kehitelmäksi pisteessä x. Jos $x = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Taylorin polynomit

Huomautus

Merkitsemällä x:n paikalle x_0 ja h:n paikalle $x - x_0$ saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.

Huomautus

Merkitsemällä x:n paikalle x_0 ja h:n paikalle $x - x_0$ saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.
Jos $x_0 = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Huomautus

Merkitsemällä x:n paikalle x_0 ja h:n paikalle $x - x_0$ saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.
Jos $x_0 = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Esimerkkejä

- Eksponenttifunktion Taylorin polynomit pisteessä $x = 0$
- Esimerkit: $\sin x$, $(1 + x)^\alpha$.

Huomautus

- Derivaattojen f', f'', f''', ... määrittäminen yleensä työlästä, eikä selkeää systemaattista muotoa välttämättä löydy helposti.

Taylorin polynomeista

Huomautus

- Derivaattojen f', f'', f''', $\ldots$ määrittäminen yleensä työlästä, eikä selkeää systemaattista muotoa välttämättä löydy helposti.
- Poikkeuksia: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, $\ldots$.

Huomautus

- Derivaattojen f', f'', f''', ... määrittäminen yleensä työlästä, eikä selkeää systemaattista muotoa välttämättä löydy helposti.
- Poikkeuksia: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, ...
- Useimmiten kannattaa turvautua tunnettuihin Taylorin polynomeihin, niiden yhdistämisiin ja sijoituksiin.

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$.

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞).

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞). Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Lause

Jos $f^{(n+1)}(x)$ on jatkuva jossain pisteen x avoimessa ympäristössä ja $P_n(h)$ f:n Taylorin polynomi, niin

$$f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1}), \quad \text{kun } h \to 0$$

Huomautus

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$,
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$,
- $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$, kun $x \to 0$.

Ordo-merkintä

Ordo-merkintöjen laskusääntöjä

Olkoot m ja n ($n \leq m$) positiivisia reaalilukuja. Tällöin

- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$, jos $x \to 0$
- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$, jos $x \to \infty$
- $cO(f(x)) = O(f(x))$, kun $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $x^{-m} O(x^{n+m}) = O(x^n)$.
- $f(x) = O(x^{n+m}) \Rightarrow f(x) = O(x^n)$, jos $x \to 0$
- $\lim_{x \to x_0} O((x - x_0)^n) = 0$.

Taylorin polynomit

Lause

Jos on olemassa astetta n oleva polynomi $Q(h)$ jolle $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$, kun $h \to 0$, niin $Q(h)$ on funktion f Taylorin polynomi pisteessä x.

Taylorin polynomit

Lause

Jos on olemassa astetta n oleva polynomi $Q(h)$ jolle $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$, kun $h \to 0$, niin $Q(h)$ on funktion f Taylorin polynomi pisteessä x.

Esimerkki

Koska

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5), \quad \text{kun } x \to 0,$$

on

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^3}{6} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^4}{24} + O((-\frac{x^2}{2})^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10}), \quad \text{kun } x \to 0 \end{aligned}$$

Taylorin polynomit

Esimerkki

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \to 0,$$

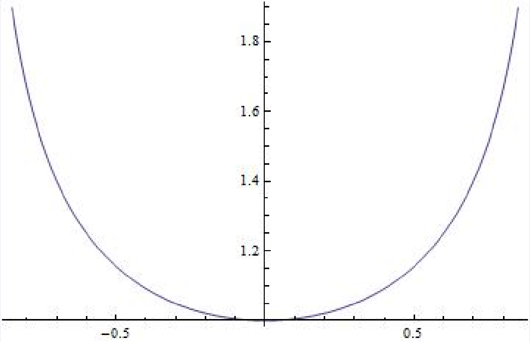
Esimerkki

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \to 0,$$

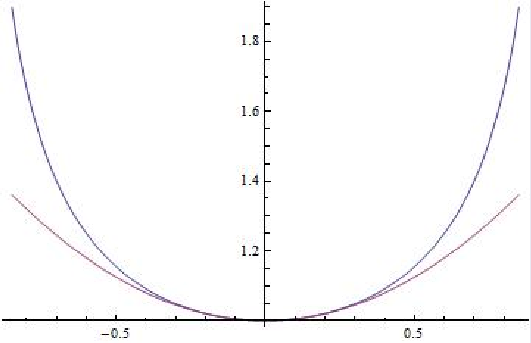
joten (sij. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $x = -t^2$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + O(t^6), \quad \text{kun } t \to 0.$$

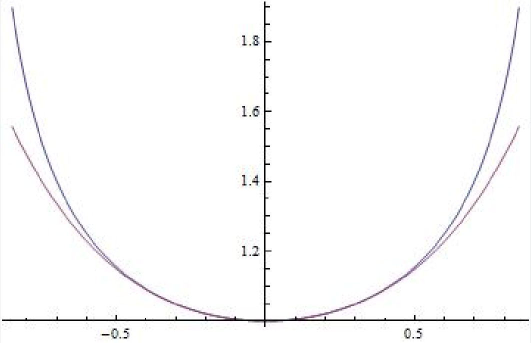
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



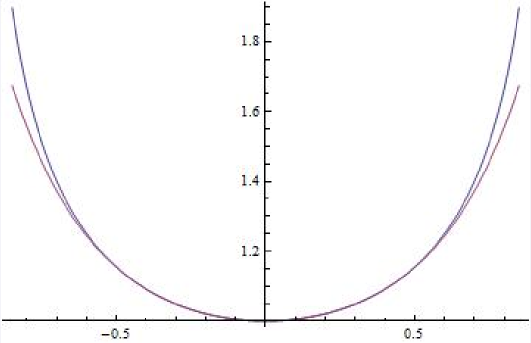
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Relativistinen kokonaisenergia

$$E_{\mathrm{tot}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relativistinen kokonaisenergia

$$E_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right)$$

Relativistinen kokonaisenergia

$$
\begin{aligned}
E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) \\
&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots
\end{aligned}
$$

Relativistinen kokonaisenergia

$$
\begin{aligned}
E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) \\
&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots \\
&= E_{\text{mass}} + E_{\text{kin}},
\end{aligned}
$$

missä $E_{\text{mass}} = m_0 c^2$

Relativistinen kokonaisenergia

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots \\ &= E_{\text{mass}} + E_{\text{kin}}, \end{aligned}$$

missä $E_{\text{mass}} = m_0 c^2$ ja $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots$

Relativistinen kokonaisenergia

$$
\begin{aligned}
E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right) \\
&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots \\
&= E_{\text{mass}} + E_{\text{kin}},
\end{aligned}
$$

missä $E_{\text{mass}} = m_0 c^2$ ja $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots$ (Einstein)

Relativistinen kokonaisenergia

$$
\begin{aligned}
E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) \\
&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots \\
&= E_{\text{mass}} + E_{\text{kin}},
\end{aligned}
$$

missä $E_{\text{mass}} = m_0 c^2$ ja $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots$ (Einstein)
Newton: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$.

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}?$$

Taylorin polynomit

Esimerkki

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}?$$

$$\frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)) - \frac{x^3}{2}}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) - x + \frac{x^3}{3}}$$

Esimerkki

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}?$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}} \\
= \; & \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)) - \frac{x^3}{2}}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) - x + \frac{x^3}{3}} \\
= \; & \frac{\frac{1}{8}x^5 + O(x^7)}{\frac{1}{5}x^5 + O(x^7)} \\
= \; & \frac{\frac{1}{8} + O(x^2)}{\frac{1}{5} + O(x^2)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$