Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Vakio C määräytyy ns. alkuehdon (reunaehdon) $y(0) = y_0$ perusteella.

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Automaattisorvi

$$D(t)D'(t) = k$$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 510$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.487135024157002\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.883677567436513\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.634312397813371\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.805479376279613\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.692765606284167\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.769482656544136\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.718270714532649\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.752944868792959\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.729678362369799\ldots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.745388854165797\ldots$
- $x_{11} = \cos x_{10} = 0.734824214649772\ldots$

Esimerkki

$$x = 0.739085133215160641655312087 67\ldots.$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräisratkaisut

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä (binary search)
- Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$
- $x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ voi siis olla x:ää parempi likiarvo nollakohdalle.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Esimerkki

Valitaan $N > 0$ ja sovelletaan Newtonin menetelmää funktioon $f(x) = x^2 - N$

Likimääräisratkaisut

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0, 1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Kiintopistelause

Jos f on kutistava kuvaus välillä I, on f:llä myös kiintopiste $x_f \in I$. Mikä hyvänsä jono $x_0 \in I$, $x_{i+1} = f(x_i)$ lähestyy kiintopistettä x_f.

Likimääräisratkaisut

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Esimerkki

Newtonin menetelmän analysointi.

Taylorin polynomit

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

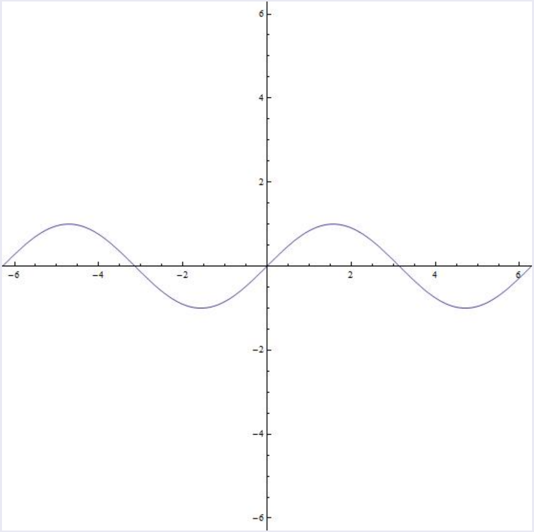
Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

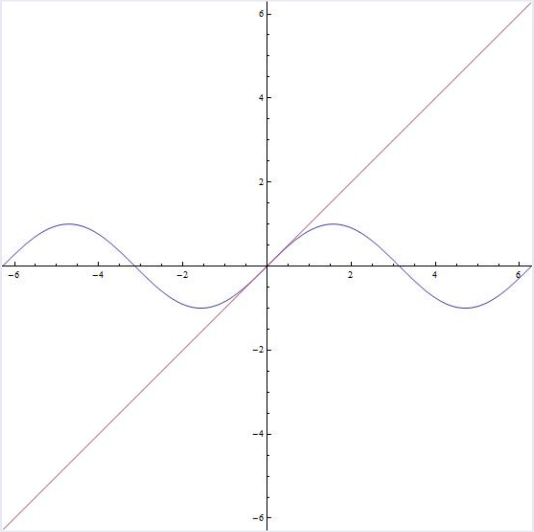
Merkitään vielä $c_0 = f(x)$, jolloin

$$f(x+h) \approx c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Sinifunktion approksimaatioita

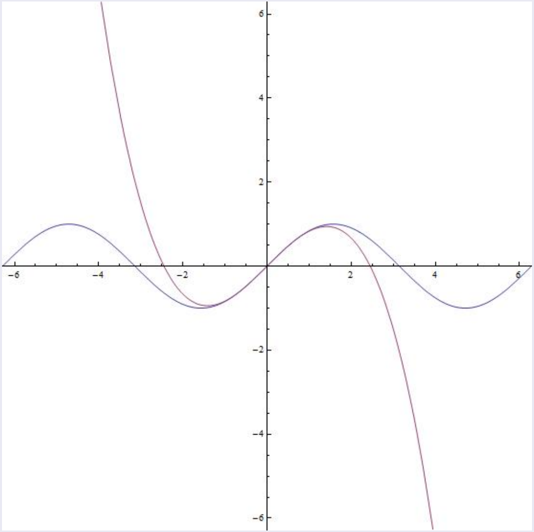


Sinifunktion approksimaatioita



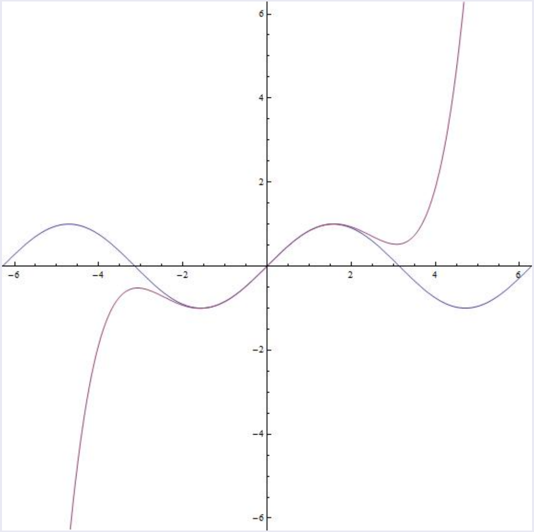
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita

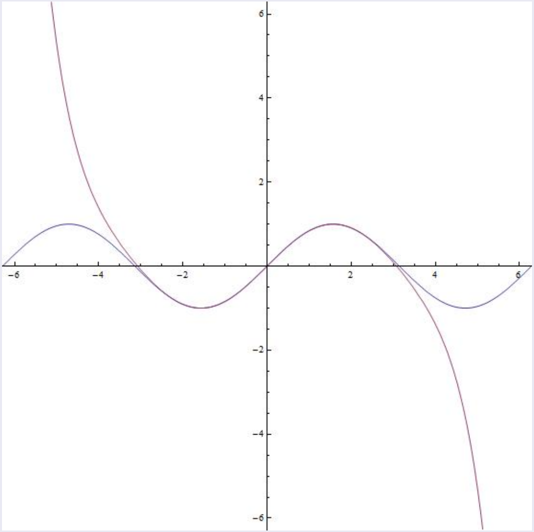


Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



Sinifunktion approksimaatioita



Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita