Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Taylorin polynomit

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

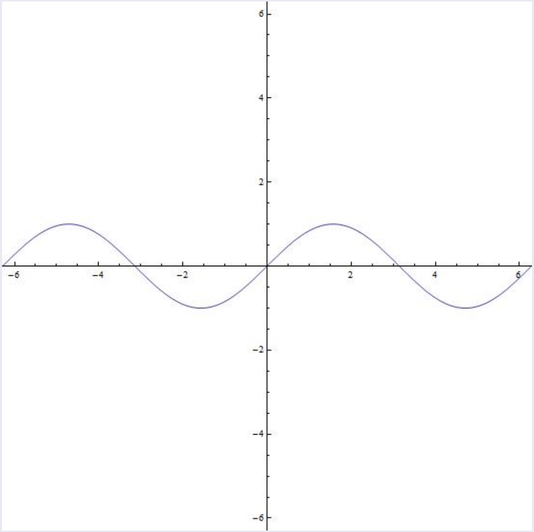
$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Merkitään vielä $c_0 = f(x)$, jolloin

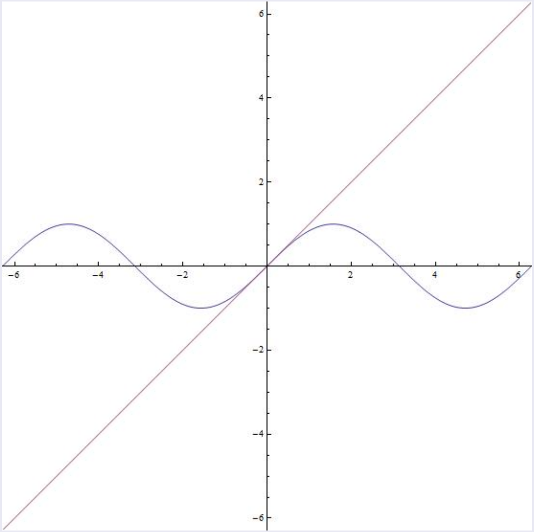
$$f(x+h) \approx c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita

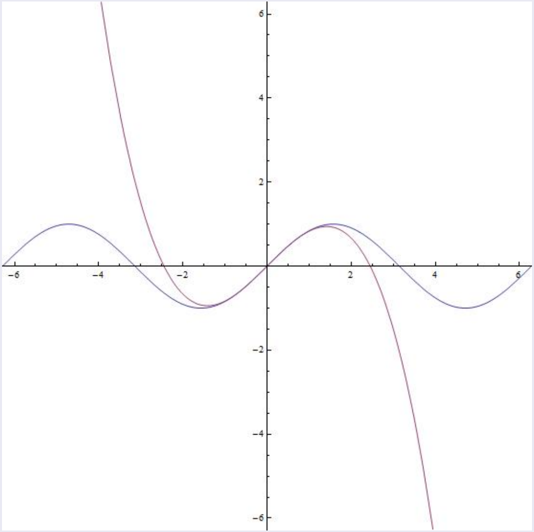


Sinifunktion approksimaatioita

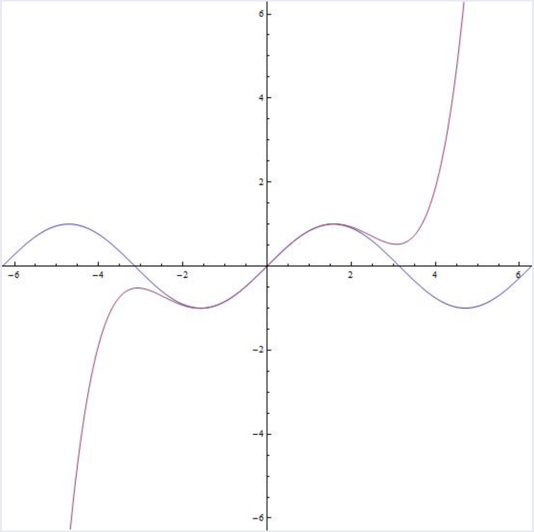


Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita

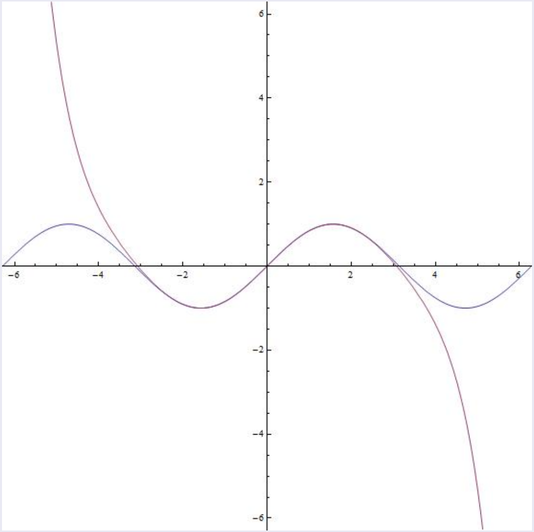


Sinifunktion approksimaatioita



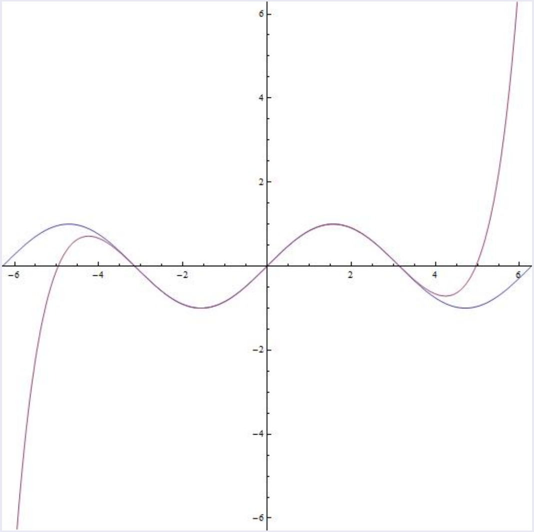
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



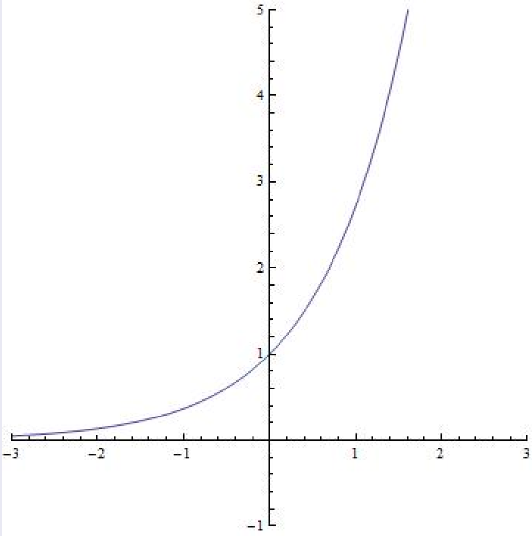
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



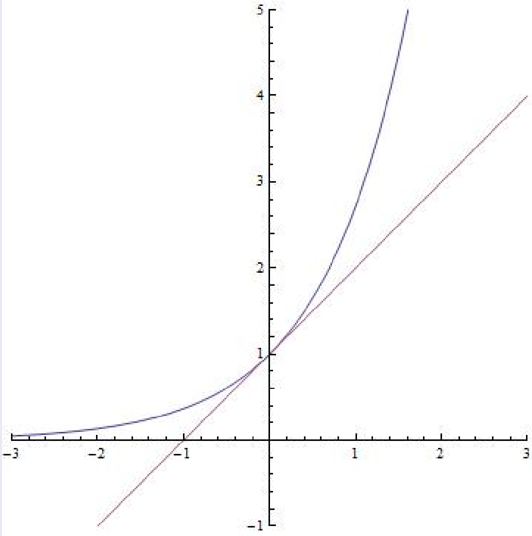
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita

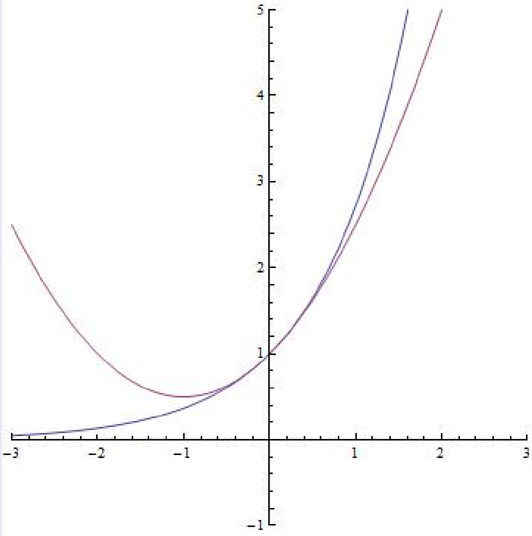


Taylorin polynomit

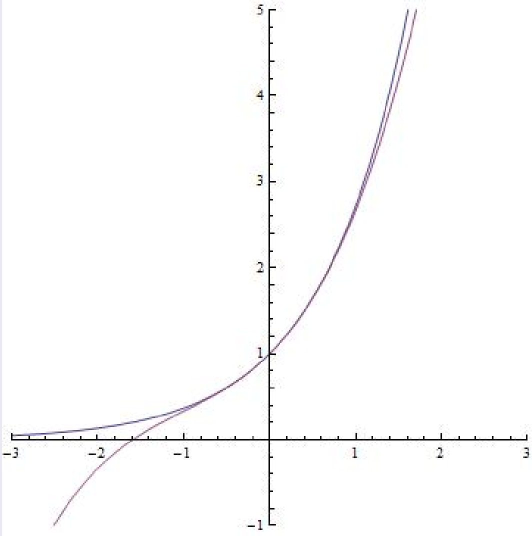
Eksponenttifunktion approksimaatioita



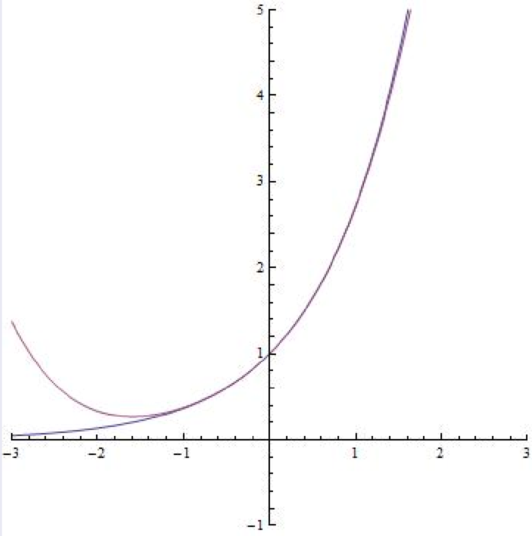
Eksponenttifunktion approksimaatioita



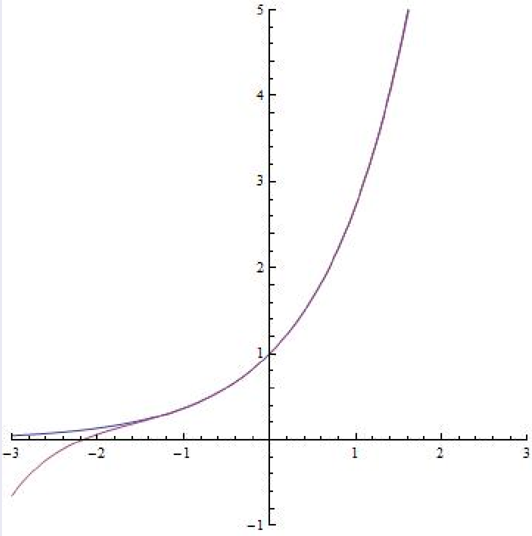
Eksponenttifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita



Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + 5c_5 h^4 + \dots,$$

johon sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3 h + 12c_4 h^2 + 20c_5 h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$. Derivoimalla edelleen saadaan

$$f'''(x+h) = 6c_3 + 24c_4h + 60c_5h^2 + 120c_6h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'''(x) = 6c_3$.

Taylorin polynomit

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_n h^n + \ldots$$

derivoidaan n kertaa h:n suhteen, jolloin saadaan

$$f^{(n)}(x+h) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}h + \ldots.$$

Sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että

$$f^{(n)}(x) = n!c_n,$$

josta

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Taylorin polynomit

Määritelmä

Oletetaan, että funktiolla f on pisteessä x derivaatat n:nteen kertalukuun asti. Funktion f n:nen asteen Taylorin polynomi pisteessä x on

$$P_n(h) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

Jos $x = 0$, polynomia $P_n(h)$ kutsutaan myös Maclaurinin polynomiksi.

Taylorin polynomit

Lause

Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x+h, x)$ jos $h < 0$). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi. Ylläolevaa esitystä sanotaan funktion f Taylorin kehitelmäksi pisteessä x. Jos $x = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Taylorin polynomit

Huomautus

Merkitsemällä x:n paikalle x_0 ja h:n paikalle $x - x_0$ saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.
Jos $x_0 = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Esimerkkejä

- Eksponenttifunktion Taylorin polynomit pisteessä $x = 0$
- Esimerkit: $\sin x$, $(1 + x)^{\alpha}$.

Huomautus

- Derivaattojen f', f'', f''', ... määrittäminen yleensä työlästä, eikä selkeää systemaattista muotoa välttämättä löydy helposti.
- Poikkeuksia: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, ...
- Useimmiten kannattaa turvautua tunnettuihin Taylorin polynomeihin, niiden yhdistämisiin ja sijoituksiin.

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K \, |g(x)| \, ,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞). Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Ordo-merkintä

Lause

Jos $f^{(n+1)}(x)$ on jatkuva jossain pisteen x avoimessa ympäristössä ja $P_n(h)$ f:n Taylorin polynomi, niin

$$f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1}), \quad \text{kun } h \to 0$$

Ordo-merkintä

Huomautus

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$,
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$,
- $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$, kun $x \to 0$.

Ordo-merkintöjen laskusääntöjä

Olkoot m ja n ($n \leq m$) positiivisia reaalilukuja. Tällöin

- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$, jos $x \to 0$
- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$, jos $x \to \infty$
- $cO(f(x)) = O(f(x))$, kun $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $x^{-m} O(x^{n+m}) = O(x^n)$.
- $f(x) = O(x^{n+m}) \Rightarrow f(x) = O(x^n)$, jos $x \to 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} O((x - x_0)^n) = 0$.

Taylorin polynomit

Lause

Jos on olemassa astetta n oleva polynomi $Q(h)$ jolle $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$, kun $h \to 0$, niin $Q(h)$ on funktion f Taylorin polynomi pisteessä x.

Esimerkki

Koska

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5), \quad \text{kun } x \to 0,$$

on

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^3}{6} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^4}{24} + O((-\frac{x^2}{2})^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10}), \quad \text{kun } x \to 0 \end{aligned}$$

Taylorin polynomit

Esimerkki

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}?$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}} \\
= \quad & \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)) - \frac{x^3}{2}}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) - x + \frac{x^3}{3}} \\
= \quad & \frac{\frac{1}{8}x^5 + O(x^7)}{\frac{1}{5}x^5 + O(x^7)} \\
= \quad & \frac{\frac{1}{8} + O(x^2)}{\frac{1}{5} + O(x^2)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$