Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Analyysin peruslause

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Funktiota $F : I \to \mathbb{R}$ kutsutaan f:n integraalifunktioksi.

Lause

Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I.

Esimerkki

$f(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

Analyysin peruslause

Analyysin peruslause

Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Seuraus

Välillä I jatkuvalla funktiolla on olemassa antiderivaatta.

Analyysin peruslause

Todistus

$$
\begin{aligned}
& F(x+h) - F(x) \\
= \ & \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\
= \ & \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\
= \ & \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x))\,dt \\
= \ & \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \\
= \ & f(x) \cdot h + h \cdot \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt}_{\epsilon(h)}
\end{aligned}
$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned}
|\epsilon(h)| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}|f(t) - f(x)|\;dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\varepsilon\,dx\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\cdot|h|\,\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

Analyysin peruslause

Newtonin–Leibnizin kaava

Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä

Merkintä "sijoitus a:sta b:hen" määritellään

$$\Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Jos $F(x)$ on jokin toinen antiderivaatta, on integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Sijoittamalla $x = a$ nähdään, että $0 = F(a) + C$, mistä $C = -F(a)$. Sijoittamalla $x = b$ saadaan

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Analogia

Määritellään differenssi Δf seuraavasti: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = \Delta f(1) + \Delta f(2) + \ldots + \Delta f(n) \\
= \quad & (f(n+1) - f(n)) + (f(n) - f(n-1)) \\
& + \ldots + (f(3) - f(2)) + (f(2) - f(1)) \\
= \quad & f(n+1) - f(1)
\end{aligned}$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Esimerkki

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ x + 1, & \text{kun } x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} f(x) \, dx?$$

Esimerkki

$$h(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\, dx, \quad h'(x)?$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Osittaisintegrointi

$$\int_a^b fg' = \Big/_a^b fg - \int_a^b f'g$$

Esimerkki

$$\int_0^2 xe^x \, dx$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Sijoitus integraaliin

Jos g' on jatkuva välillä $[\alpha, \beta]$, $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$, ja $g(\alpha) = a$ sekä $g(\beta) = b$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Esimerkki

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$x = \cos t$.

Newtonin–Leibnizin kaava

Määritelmä

Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.

Esimerkki

$f(x) = x^2$ on parillinen ja $f(x) = x^3$ pariton.

Esimerkki

$\sin x$ on pariton ja $\cos x$ parillinen. Huomaa että

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8).$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Lause

Olkoon f jatkuva välillä $[-a, a]$. Jos f on parillinen, on

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$$

ja jos f on pariton, on

$$\int_{-a}^{a} f = 0$$

Pinta-ala

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)\,dx$$

Intuitio:

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x)\,dx$ summaamista

Kaarenpituus

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.
\end{aligned}
$$

(Parametrimuoto)

Kaarenpituus

xy-muoto $y = f(x)$

Merkitään $x = t$, $y = f(t)$, jolloin kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Tilavuus

Intuitio:

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx$$

Pyörähdyskappale

- Tilavuus
- Vaipan pinta-ala