Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Keskiarvo (diskreetti)

$$\mu = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}.$$

Keskiarvo (diskreetti)

$$\mu = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}.$$

Keskiarvo (jatkuva)

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Keskiarvo (diskreetti)

$$\mu = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}.$$

Keskiarvo (jatkuva)

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Vertailu:

$$\mu \cdot n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Keskiarvo (diskreetti)

$$\mu = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}.$$

Keskiarvo (jatkuva)

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Vertailu:

$$\mu \cdot n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Jatkuvasti muuttuvan suureen ”summa”

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$

Jatkuvasti muuttuvan suureen ”summa”

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW$

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds$.

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds.$

Esimerkki $F = C\frac{1}{s^2}$

$$W =$$

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds.$

Esimerkki $F = C\frac{1}{s^2}$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} C\frac{1}{s^2}\, ds$$

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds.$

Esimerkki $F = C\frac{1}{s^2}$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} C\frac{1}{s^2}\, ds = -C \Big/_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s}$$

Jatkuvasti muuttuvan suureen "summa"

Esimerkki

- Voima $F = 10$ N työntää kappaletta 30 m metrin matkan
- $W = 10N \cdot 30m = 300Nm$
- Voima $F(s)$ työntää kappaletta ds matkan.
- $dW = F(s) \cdot ds$
- Kokonaistyö: $W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\, ds.$

Esimerkki $F = C\frac{1}{s^2}$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} C\frac{1}{s^2}\, ds = -C \Big/_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s} = C(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2})$$

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ (a, $b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.

Epäoleelliset integraalit

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a,\ b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f =$$

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \to \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa.

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \to \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali *hajaantuu* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^{b} f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

I lajin epäoleellinen integraali

Huomautus

Integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$$

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$\int_0^\infty \cos x \, dx$$

Esimerkki ($a > 0$)

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s} \, dx$$

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c,d] \subseteq [a,\infty)$, Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$ suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$, Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$ suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

I lajin epäoleellinen integraali

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\displaystyle\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\displaystyle\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g:n minorantti ja että g on f:n majorantti.

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\displaystyle\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\displaystyle\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g:n minorantti ja että g on f:n majorantti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx \quad \text{ja} \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x)$, $g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x)$, $g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2}\,dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b-\epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b-\epsilon, b)$ $(\epsilon > 0)$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b-\epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b-\epsilon, b)$ $(\epsilon > 0)$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b-\epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b-\epsilon, b)$ $(\epsilon > 0)$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f.$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$$

Esimerkkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)}\,dx$$

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$$

Esimerkkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)}\,dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} f$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.

Sarja

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} f(x)\,dx.$$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} f(x)\,dx.$$

Sarja määritellään analogisesti.

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

Osasummat

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2
\end{aligned}
$$

Sarjaoppia

Osasummat

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

Sarjaoppia

Osasummat

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
\vdots & \quad \vdots \\
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}
$$

Osasummat

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \quad \vdots \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

Osasummat muodostavat *lukujonon* $S_1, S_2, S_3, \ldots$

Lukujonot

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ raja-arvo on A, merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \to d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ raja-arvo on A, merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \to d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Lukujonot

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lukujonot

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lukujonot

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Lukujonot

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Esimerkki

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Sarjat

Määritelmä

Olkoon a_1, a_2, a_3, … lukujono. Sen osasummien jono S_1, S_2, S_3, … määritellään $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Sarjat

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \ldots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä olemassa.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \ldots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$).

Määritelmä

Olkoon a_1, a_2, a_3, ... lukujono. Sen osasummien jono S_1, S_2, S_3, ... määritellään $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim S_n$.

Lause

- Jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$$

suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Lause

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ $(k > 1)$ suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Lause

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ $(k > 1)$ suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

- Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Mikäli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, sanotaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee *itseisesti*. Tällöin pätee

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, .$$

Geometrinen sarja

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{(vakio)}.$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{(vakio)}.$$

Geometrinen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$.

Geometrinen sarja

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{(vakio)}.$$

Geometrinen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$.

Määritelmä

Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on geometrinen, jos jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen.

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Geometrinen sarja

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- Jos $|q| > 1$, ei raja-arvoa $\lim q^n$ ole äärellisenä.

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$.

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$. Suppenevassa tapauksessa sarjan summa on

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a\frac{1}{1-q}.$$

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793... = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \ldots$$

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793... = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Esimerkkejä

- Jokainen sarja

$$k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

missä $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, suppenee.

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Esimerkiksi harmoninen sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, vaikka $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(M \geq M_\epsilon \wedge k \geq 0 \to \left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| < \epsilon)$$

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(M \geq M_\epsilon \land k \geq 0 \to \left|\sum_{n=M}^{M+k} a_n\right| < \epsilon)$$

"Sarja suppenee mikäli (katkaistu) loppuosa saadaan mielivaltaisen pieneksi ($< \epsilon$) valitsemalla katkaisukohta M riittävän suureksi"

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t)\,dt \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(t)\,dt$$

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t)\,dt \le \sum_{n=M}^\infty f(n) \le f(M) + \int_M^\infty f(t)\,dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \ge 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \ \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)\,dt \downarrow$$

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t)\,dt \le \sum_{n=M}^\infty f(n) \le f(M) + \int_M^\infty f(t)\,dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \ge 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1,\infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \;\Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)\,dt \downarrow$$

Seuraus

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \downarrow \;\Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^s}\,dt \downarrow \;\Leftrightarrow s > 1$$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \right)$

Suppenemiskriteereitä

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \le b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \;\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \;\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow$

Minorantti-majoranttiperiaatteen raja-arvomuoto

Oletetaan, että $\lim \left| \dfrac{a_n}{b_n} \right| = L$.

- Jos $L = 0$, niin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow$.
- Jos $L = \infty$, niin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow$.

Suppenemiskriteereitä

Osamäärätarkastin

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta M alkaen

- $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$, ($q$ vakio) niin sarja suppenee itseisesti.
- $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Suppenemiskriteereitä

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Suppenemiskriteereitä

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Juuritarkastin

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Juuritarkastin

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Juuritarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Jos $L < 1$, niin sarja suppenee (itseisesti)
- Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu

Määritelmä

Jos $a_n \geq 0$, sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

on vuorotteleva.

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee.

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee. Jos lisäksi merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{M} (-1)^{n-1} a_n + R_M,$$

on

$$R_M = (-1)^M a_{M+1} + (-1)^{M+1} a_{M+2} + (-1)^{M+2} a_{M+3} + \ldots$$

samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^M a_{M+1}$ ja $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Tulosarjat

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ n, $m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Tulosarjat

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ n, $m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Lause

Jos $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST.

Tulosarjat

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n$$

Tulosarjat

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_{k-n} b_n.$$

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$.

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$.

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$. Tällöin sarjaa kutsutaan myös Maclaurinin sarjaksi.

Suppenemissäde

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$

Suppenemissäde

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$

Suppenemissäde

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Suppenemissäde

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lukua R kutsutaan suppenemissäteeksi. Ensimmäisessä tapauksessa sanotaan, että $R = 0$ ja viimeisessä, että $R = \infty$.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R.

Seuraus

Potenssisarjan summafunktiolla $F(x)$ on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja $a_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Esimerkkejä

Binomisarja

Arkussinin sarja

Eksponenttifunktio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Sarjaopin sovelluksia

Eksponenttifunktio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Trigonometriset funktiot

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

Sarjaopin sovelluksia

Eksponenttifunktio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Trigonometriset funktiot

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$