Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\, dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ $(\epsilon > 0)$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$$

Esimerkkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)}\,dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Yleinen epäoleellinen integraali

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.

Sarjaoppia

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} f(x)\,dx.$$

Sarja määritellään analogisesti.

Osasummat

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}
$$

Osasummat muodostavat *lukujonon* $S_1, S_2, S_3, \ldots$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ raja-arvo on A, merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \to d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Lukujonot

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Esimerkki

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Määritelmä

Olkoon a_1, a_2, a_3, ... lukujono. Sen osasummien jono S_1, S_2, S_3, ... määritellään $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim S_n$.

Lause

- Jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$$

suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Lause

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ $(k > 1)$ suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

- Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Mikäli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, sanotaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee *itseisesti*. Tällöin pätee

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Geometrinen sarja

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{(vakio)}.$$

Geometrinen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$.

Määritelmä

Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on geometrinen, jos jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen.

Geometrinen sarja

Osasummat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- Jos $|q| > 1$, ei raja-arvoa $\lim q^n$ ole äärellisenä.

Geometrinen sarja

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$. Suppenevassa tapauksessa sarjan summa on

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a\frac{1}{1-q}.$$

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793... = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Esimerkkejä

- Jokainen sarja

$$k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

missä $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, suppenee.

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Esimerkiksi harmoninen sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, vaikka $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Suppenemiskriteereitä

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(M \geq M_\epsilon \wedge k \geq 0 \to \left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| < \epsilon)$$

"Sarja suppenee mikäli (katkaistu) loppuosa saadaan mielivaltaisen pieneksi ($< \epsilon$) valitsemalla katkaisukohta M riittävän suureksi"

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t)\,dt \le \sum_{n=M}^\infty f(n) \le f(M) + \int_M^\infty f(t)\,dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \ge 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \ \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)\,dt \downarrow$$

Seuraus

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \downarrow \ \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^s}\,dt \downarrow \ \Leftrightarrow s > 1$$

Suppenemiskriteereitä

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \le b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \Big(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \Big)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow$

Suppenemiskriteereitä

Minorantti-majoranttiperiaatteen raja-arvomuoto

Oletetaan, että $\lim \left| \dfrac{a_n}{b_n} \right| = L$.

- Jos $L = 0$, niin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow$.
- Jos $L = \infty$, niin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow$.

Suppenemiskriteereitä

Osamäärätarkastin

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta M alkaen

- $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$, ($q$ vakio) niin sarja suppenee itseisesti.
- $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Suppenemiskriteereitä

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Juuritarkastin

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Juuritarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Jos $L < 1$, niin sarja suppenee (itseisesti)
- Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu

Vuorottelevat sarjat

Määritelmä

Jos $a_n \geq 0$, sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

on vuorotteleva.

Vuorottelevat sarjat

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee. Jos lisäksi merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{M} (-1)^{n-1} a_n + R_M,$$

on

$$R_M = (-1)^M a_{M+1} + (-1)^{M+1} a_{M+2} + (-1)^{M+2} a_{M+3} + \ldots$$

samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^M a_{M+1}$ ja $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Tulosarjat

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ $n,\ m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Lause

Jos $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST.

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_{k-n} b_n.$$

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$. Tällöin sarjaa kutsutaan myös Maclaurinin sarjaksi.

Suppenemissäde

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lukua R kutsutaan suppenemissäteeksi. Ensimmäisessä tapauksessa sanotaan, että $R = 0$ ja viimeisessä, että $R = \infty$.

Potenssisarjat

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R.

Seuraus

Potenssisarjan summafunktiolla $F(x)$ on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja $a_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Potenssisarjat

Esimerkkejä

Binomisarja

Arkussinin sarja