

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 1, 20.2.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' = 4x^2 - 2x + 1$ kaikki ratkaisut ja sellainen ratkaisu, että $y(0) = -6$ ja $y'(0) = -2$.
2. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' + y = 0$ kaikki ratkaisut.
3. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' + y = e^x + x + 1$ kaikki ratkaisut. Käytä luennolla esittyä yritemenetelmää yksittäisratkaisun löytämiseksi.
4. Etsi kaikki sellaiset funktiot, joiden toinen derivaatta on sama kuin alkuperäinen funktio. Esitä ratkaisut sekä reaalisessa että kompleksisessa muodossa. Ohje: kirjoita tehtävästä vakiokertoiminen, lineaarinen differentiaaliyhtälö. Riittää löytää kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.
5. Etsi kaikki sellaiset funktiot, joiden kolmas derivaatta on sama kuin alkuperäinen funktio. Ohje samoin kuin edellisessä tehtävässä.
6. Olkoot $y(0) = y'(0) = 1$. Merkitse $Y = Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ja laske Laplace-muunnokset tehtävän 2 differentiaaliyhtälöstä puolin ja toisin. Voit käyttää kurssin verkkosivulta löytyvää taulukkoa tai Matlabia.
7. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$$

käyttämällä Laplace-muunnoksia ja alkuehtoja $y(0) = y'(0) = 0$. Ohje: Selvitä miten polynomi $s^2 - 4s + 4$ jakautuu tekijöihin.

8. Polynomilla $x^3 - 4x^2 + x + 6$ on nollakohta $x = 2$. Päättele tästä millaisella ensimmäisen asteen polynomilla tämä on jaollinen (millaisella 1. asteen polynomilla on nollakohta 2?). Suorita jako jakokulmassa ja etsi polynomien muut nollakohdat.
9. Selvitä $\gcd(x^3 - 4x^2 + x + 6, x^2 + 3x + 2)$ käyttämällä aiemmassa tehtävässä esiintynyttä tekijöihinjakoa sekä jakamalla myös toinen polynomi tekijöihin. Tekijöihinjakoa varten kannattaa etsiä nollakohdat. (gcd: greatest common divisor, suomeksi suurin yhteinen tekijä: syt).