

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 3, 6.3.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy + 15y^2)y' = 0$$

on eksakti ja etsi sille (implisiittinen) ratkaisu.

2. Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$4xy^2 + 3x^2y + 5y^4 + (4x^2y + x^3 + 20xy^3)y' = 0$$

on eksakti ja etsi sille (implisiittinen) ratkaisu.

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Määritä e^{tA} .

4. Etsi yleinen ratkaisu seuraavalle DY-parille ja sellainen ratkaisu, jolle $x(0) = 1$ ja $y(0) = 2$.

$$\begin{cases} x' &= -7x + 12y \\ y' &= -4x + 7y \end{cases}$$

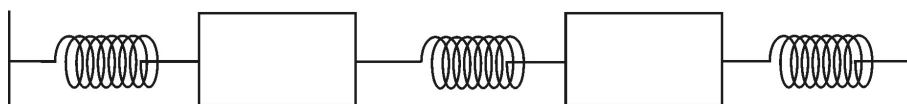
5. Etsi yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= -7x + 12y + t \\ y' &= -4x + 7y + e^t \end{cases}$$

6. Etsi yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= -3x + y \\ y' &= -x - y \end{cases}$$

7. Kolme joustua ja kaksi massaa on kytketty kuvion osoittamalla tavalla. Etäisyydet on valittu siten, että lepotilassa systeemin jousista ei yksikään ole jännittynyt.



Hooken lain mukaan jousen aiheuttama voima siihen kiinnitettyyn kappaleeseen on $F = -k\Delta x$, missä Δx on jousen poikkeama tasapainoasemastaan ja k jousivakio. Merkitään ensimmäisen massan poikkeamaa lepoasemasta x :llä ja toisen y :llä ja valitaan oikeanpuoleinen suunta positiiviseksi. Kirjoita Newtonin lain mukaiset liikeyhtälöt x :lle ja y :lle, kun jousivakiot vasemmalta oikealle ovat k_1 ja k_2 ja k_3 sekä massat m_1 ja m_2 .

Ohje: Oletetaan, että massan m_1 paikka (=poikkeama tasapainotilasta) on x . Tällöin kuvion vasemmanpuolimmaisoin jousi kohdistaa massaansa voiman $-k_1x$. Määritä toinenkin voima joka massaansa m_1 kohdistuu, olettaen että massan m_2 poikkeama tasapainotilasta on y . Huomioi, että x'' edustaa kiihtyvyyttä, joten Newtonin mekaniikan mukaan m_1x'' on massaansa m_1 vaikuttavien kokonaisvoimien summa. Määritä m_2y'' samalla periaatteella.

8. Esitä joitain tapoja jotka saattaisivat johtaa edellisen tehtävän differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun.
9. Olkoon x syöte ja y tuloste, joille pätee differentiaaliyhtälö

$$y'' + y' - 2y = x' + 3x$$

Määritä systeemin siirtofunktio. Ohje: Luentoruudut