

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 4, 13.3.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Laske Z -muunnos funktiolle $x(t) = t$, kun näytteenottoväli T on kiinnitetty.
2. Määritä jonolle $x_n = na^n$ Z -muunnos. Ohje: Hyödynnä ensin muunnos jonolle a^n (luennoilla) ja kokeile derivoimista z :n suhteen.
3. Määritellään lukujono $G_0 = 2$, $G_1 = 1$ ja $G_{n+2} = G_{n+1} + 6G_n$ kun $n \geq 2$. Määritä jonon G_n jäsenille eksplisiittinen lauseke käyttämällä Z -muunnoksia. Ohje: Luento-esimerkki.

4. Selitä miten funktion $x(t) = \cos(t)$ Z -muunnos voitaisiin määrittää, kun näytteenottoväli on T . Tässä tehtävässä ei tarvitse esittää tulosta, vaan menetelmä miten tulokseen voitaisiin päästä. Ohje: Eulerin kaava.

5. Oletetaan, että syötejono x_n (input) ja tulostejono y_n (output) toteuttavat yhtälön

$$y_{n+1} + 2y_n = x_n.$$

Onko systeemi stabiili? Jos ei, millainen rajoitettu syöte voisi tuottaa rajoittamattoman tulosteen? Ohje: Laske aluksi Z -muunnos puolittain ja selvitä millaisia siirtofunktion navat ovat.

6. Oletetaan, että syötejono x_n (input) ja tulostejono y_n (output) toteuttavat yhtälön

$$3y_{n+2} - 13y_{n+1} + 4y_n = x_{n+1} - 4x_n.$$

Onko systeemi stabiili?

7. Muunna DY-ryhmä

$$\begin{cases} x'' &= y'x' + z^2y \\ y'' &= (y')^2 - 3y'z' \end{cases}$$

sellaiseksi DY-ryhmäksi, jossa vasemmalla puolella esiintyy vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja ja oikealla puolella ei esiinny derivaattoja ollenkaan. Ohje: Määrittele uusia funktioita tunnettujen funktioiden derivaattoina ja kasvata yhtälöiden määrää (kts. luento-esimerkki).

8. Avaruuden \mathbb{R}^2 piste $(x(t), y(t))$ liikkeen ajan myötä määrittää DY-pari

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

alkuehtoineen. Selvitä mitä on $(x', y') \cdot (x, y)$ (pistetulo) ja esitä sanallinen tulkinta. Ohje: (x, y) edustaa pisteen paikkaa, (x', y') taas pisteen nopeutta.

Ratkaise DY-pari käyttämällä ominaisarvoihin- ja vektoreihin perustuvaa menetelmää.

9. Muunna differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{-x - y - 1}{2x + 2y + 3}.$$

separoituvaksi sijoituksella $z = x + y$. Ohje: Määritä ensin y' .