Mika Hirvensalo

# Insinöörimatematiikka: Liite 1
# Laplace-muunnokset
# Osamurtohajotelmat
# Polynomin tekijöihinjako

# Sisällys

# Luku 1
# Laplace-muunnokset

Laplace-muunnokset tarjoavat työkalun vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi. Niiden avulla voidaan muuntaa lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö *algebralliseksi* yhtälöksi, josta voidaan ratkaista tuntematon funktio $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Etsitty funktio $y(t)$ saadaan tämän jälkeen käänteisellä Laplace-muunnoksella. Yleensä oletetaan, että $y$ on oikealta jatkuva pisteessä nolla.

Laplace-muunnokset ovat tärkeä työkalu erityisesti piiritekniikkaan liittyvien integraali- ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa.

**Taustatietoa**

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) oli ranskalainen matematiikko ja tähtitieteilijä. Laplacen tärkeimpiin saavutuksiin luetaan taivaanmekaniikan kehittämistyö, lämmönjohtumisyhtälön esittäminen, Laplace-muunnosten perusteet ja hypoteesi mustien aukkojen olemassaolosta.

(kuva: Wikimedia Commons)

## 1.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

**Määritelmä 1.** Olkoon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos integraali

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{1.1}$$

suppenee itseisesti joillakin $s$:n arvoilla, sanotaan integraalia (1.1) funktion $f$ *Laplace-muunnokseksi* ja merkitään $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ tai lyhyemmin $F = \mathcal{L}[f]$. Tällöin funktiota $f$ kutsutaan *originaalifunktioksi* ja funktiota $F$ *kuvafunktioksi*.

*Esimerkki 1.* Osoitetaan, että $f(t) = e^{\lambda t}$ on originaalifunktio. Jos $s > \lambda$, on

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}](s) = \int_0^\infty e^{\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(\lambda - s)t}\,dt = \Big/_0^\infty \frac{1}{\lambda - s}e^{(\lambda - s)t} = \frac{1}{s - \lambda}.$$

**Seuraus 1.** *Sijoittamalla edelliseen esimerkkiin $\lambda = 0$ saadaan vakiofunktio $f(t) = 1$ ja sen Laplace-muunnos: $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$, kun $s > 0$.*

*Esimerkki 2.* Olkoon $r > 0$ ja osoitetaan, että $f(t) = t^r$ on originaalifunktio. Sijoitetaan tätä varten integraaliin

$$\int_0^M t^r e^{-st}\,dt$$

$t = \frac{u}{s}$, jolloin saadaan

$$\int_0^{Ms} \left(\frac{u}{s}\right)^r e^{-u} \frac{1}{s}\,du = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^{Ms} u^{r+1-1} e^{-u}\,du.$$

Antamalla luvun $M$ lähestyä ääretöntä todetaan, että

$$\mathcal{L}[t^r](s) = \int_0^\infty t^r e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

Laplace-muunnoksen perusominaisuudet voidaan johtaa (epäoleellisten) integraalien ominaisuuksista aivan samoin kuin Fourier-muunnostenkin (käsitellään kurssilla Fourier-analyysi) vastaavat ominaisuudet, eikä niitä tässä yhteydessä erikseen todisteta.

**Lause 1 (Lineaarisuus).** *Jos $f$ ja $g$ ovat originaalifunktiota ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin myös $af + bg$ on originaalifunktio ja $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.*

**Lause 2 (Muuttujan skaalaus).** *Jos $f$ on originaalifunktio, $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ ja $a > 0$, niin $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$.*

**Lause 3 (Kertominen eksponenttifunktiolla).** *Jos $f(t)$ on originaalifunktio, niin myös $e^{at}f(t)$ on, ja*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a).$$

**Lause 4 (Kuvafunktion derivointi).** *Jos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, ja Laplace-muunnoksissa tarvittavat integraalit ovat olemassa, niin*

$$F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

**Lause 5 (Originaalifunktion derivointi).** *Olkoon $f$ derivoituva originaalifunktio ja oletetaan, että funktiolla $f'(t)$ on jokaisella äärellisellä välillä vain äärellisen monta epäjatkuvuuskohtaa. Tällöin myös $f'(t)$ on originaalifunktio ja*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+),$$

*missä $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$.*

Edellisestä lauseesta saadaan induktiolla seuraava yleistys: Jos funktiolla $f^{(n)}$ on Laplace-muunnos, niin

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

**Lause 6 (Originaalifunktion integrointi).** *Oletetaan että $f$ on originaalifunktio. Tällöin integraalifunktio*

$$g(t) = \int_0^t f(u)\,du$$

*on originaalifunktio ja*

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(u)\,du](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

## 1.2 Laplace-muunnosten olemassaolosta

Yleisesti ottaen voidaan todeta, että $s$:n positiivisilla arvoilla integraalissa

$$F(s) = \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st}\, dt, \tag{1.2}$$

eksponenttifunktio $e^{-st} = \frac{1}{e^{st}}$ lähestyy nollaa hyvin nopeasti, mikä edesauttaa integraalin (1.2) suppenemista.

Lisäksi niiden pisteiden $s$ joukko, joille (1.2) suppenee, on varsin yksinkertainen: Jos nimittäin integraali (1.2) suppenee *jollakin* arvolla $s = s_1$, niin mille hyvänsä arvolle $s_2 > s_1$ pätee

$$|f(t)|\, e^{-s_2 t} < |f(t)|\, e^{-s_1 t}$$

joten siis myös integraali

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-s_2 t}\, dx$$

suppenee. Tämä merkitsee sitä, että jos Laplace-muunnoksen määrittelemä integraali (1.1) suppenee itseisesti jollakin arvolla $s_1$, suppenee se itseisesti myös koko puolisuoralla $[s_1, \infty)$. Tällöin suppenemisalueen (ja siis Laplace-muunnoksen määrittelyjoukon) selvittämiseksi pitää enää löytää pienin mahdollinen $s_1$, jolla integraali (1.1) suppenee itseisesti.

**Määritelmä 2.** Olkoon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos on olemassa sellainen luku $s$, että että integraali

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st}\, dt \tag{1.3}$$

suppenee, määritellään $s_0 = \inf\{s \in R \mid \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st}\, dt \text{ suppenee}\}$ ja sanotaan, että $s_0$ on *Laplacen integraalin*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

*itseisen suppenemisen abskissa* tai funktion $f(t)$ *kasvueksponentti*. Jos integraali (1.3) suppenee kaikilla reaaliluvuilla $s$, määritellään $s_0 = -\infty$.

Tarkastellaan sitten sitä kysymystä, minkälaisille funktioille kasvueksponentin olemassaolo voidaan taata, toisin sanoen siis minkälaisille funktioille Laplace-muunnos on määritelty (*jollakin* välillä $(s_0, \infty)$). Edelleen eri tavalla ilmaistuna: tarkastellaan, mitkä funktiot ovat originaalifunktiota.

Aiemmin havaittiin, että positiivisilla $s$:n arvoilla Laplace-muunnoksen määritelmässä esiintyy voimakkaasti kohti nollaa lähestyvä funktio $t \mapsto e^{-st}$, mikä edesauttaa integraalin (1.3) suppenemista. Jos (1.3) ei suppene, kasvaa $f$ siis varsin voimakkaasti. Palautetaan mieleen eräs tärkeä käsite:

**Määritelmä 3.** Funktio $|f(t)|$ *kasvaa hitaammin* kuin $e^{at}$, jos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} = 0.$$

Jos on olemassa sellainen $a > 0$, että $|f(t)|$ kasvaa hitaammin kuin $e^{at}$, sanotaan, että $|f(t)|$:n kasvu on *(korkeintaan) eksponentiaalinen*.

Jos funktio $|f(t)|$ kasvaa hitaammin, kuin $e^{at}$, tulee

$$\frac{|f(t)|}{e^{at}}$$

miten pieneksi hyvänsä, kunhan $t$ valitaan riittävän suureksi. Erityisesti on siis olemassa sellainen rajaluku $M_1$, että ylläoleva lauseke tulee pienemmäksi kuin 1, kunhan $t \geq M_1$. Tällöin $|f(t)| \leq e^{at}$, kunhan $t \geq M_1$ ja siis

$$\left| f(t)e^{-st} \right| \leq e^{at}e^{-st} = e^{(a-s)t}.$$

Arvoilla $s > a$ todetaan, että

$$\int_{M_1}^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt$$

suppenee, jolloin myös siis

$$\int_{M_1}^{\infty} |f(t)|\,e^{-st}\,dt$$

suppenee. Tämä ei kuitenkaan vielä yksin riitä takaamaan Laplace-muunnoksen olemassaoloa. Lisäksi on vielä tarkasteltava väliä $[0, M_1]$. Jos myös integraali

$$\int_{0}^{M_1} |f(t)|\,e^{-st}\,dt$$

on olemassa (esimerkiksi välillä $[0, M_1]$ jatkuville funktioille näin on), on funktiolla $f$ olemassa Laplace-muunnos ja siis $f$ on originaalifunktio. Johtopäätöksenä voidaan todeta, että joukossa $[0, \infty)$ jatkuvilla funktiolla, joiden kasvu on korkeintaan eksponentiaalista, on olemassa Laplace-muunnos. Tällaiset funktiot kattavat suurimman osan käytännön sovelluksissa esiintyvistä funktioista.

## 1.3 Konvoluutio ja deltafunktio

Laplace-muunnoksille pitää määritellä oma konvoluutiokäsitteensä, joka toteuttaa samankaltaisen multiplikatiivisuusehdon kuin Fourier-muunnosten konvoluutio (vrt. kurssi Fourier-analyysi). Konvoluution erilainen muoto johtuu siitä, että Laplace-muunnokset määritellään vain yhteen suuntaan äärettömällä integraalilla.

**Määritelmä 4.** Funktioiden $f$ ja $g$ *konvoluutio* $f * g$ määritellään kaavalla

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

*Huomautus 1.* Katkaisemalla funktiot positiiviselle reaaliakselille Heavisiden funktion avulla voidaan yllämainittu konvoluutio kirjoittaa muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)H(u)g(t-u)H(t-u)\,du,$$

joka on sama kuin Fourier-muunnoksillle määritelty konvoluutio.

*Esimerkki 3.*

$$\begin{aligned}(\sin * \cos)(t) &= \int_0^t \sin(u)\cos(t-u)\,du = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin(2u-t)\right)du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \sin t\,du + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2u-t)\,du = \frac{1}{2}t\sin t.\end{aligned}$$

Konvoluution merkitys Laplace-muunnoksille on samanlainen kuin Fourier-muunnoksille:

**Lause 7.** *Jos $f$ ja $g$ ovat originaalifunktioita, niin*

*1.* $f * g = g * f$,
*2.* $f * (g * h) = (f * g) * h$,

*3.* $f * (ah + bg) = af * h + bf * g$*, ja*
*4.* $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$*.*

*Todistus.* Sivuutetaan.

Myös Diracin $\delta$-funktiota tarvitaan toisinaan Laplace-muunnosten yhteydessä. Delta-funktion määrittelevän integraalin ja Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan $\delta$-funktion Laplace-muunnos tulee laskea seuraavasti:

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)](s) = \int_0^\infty \delta(t - t_0) e^{-st}\, dt = e^{-st_0}.$$

## 1.4 Laplace-muunnoksen yhteys Fourier-muunnokseen, inversiokaava

Jos luvun alussa kuvattua menetelmää halutaan käyttää differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen käytännössä, pitää kuvafunktiosta voida päätellä originaalifunktio. Fourier-muunnosten yhteydessä käänteismuunnoksen olemassaolo ja löytäminen on tietyssä mielessä suoraviivaisempaa: Koska Fourier-muunnoksen ja sen käänteismuunnoksen välillä on varsin hyvä symmetria, ei käänteismuunnoksen etsiminen ole oleellisesti vaikeampaa kuin itse muunnoksenkaan. Laplace-muunnosten kohdalla on kuitenkin toisin: Laplace-muunnoksen etsiminen useissa käytännössä esiintyvissä tapauksissa on oleellisesti helpompaa kuin käänteismuunnoksen määrittäminen.

Käänteismuunnoksen ongelma on silti varsin luonnollinen: Voidaanko Laplace-muunnoksesta

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

päätellä alkuperäinen funktio $f(t)$ ja jos voidaan, miten se käytännössä tapahtuu? Kun muistetaan, että integraalin

$$\int_0^M f(t) e^{-st}\, dt$$

arvo ei muutu, mikäli integrandin $f(t)e^{-st}$ arvoa muutetaan äärellisen monessa pisteessä, huomataan, että kahdella eri funktiolla voi olla sama Laplace-muunnos: Jos nimittäin $f_1$ saadaan funktiosta $f$ muuttamalla sen arvoa äärellisessä määrässä pisteitä, on $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f_1]$ ja siksi alkuperäistä funktiosta ei voi saada esille Laplace-muunnoksesta.

On kuitenkin huomattava, että jos funktio $f_1$ saadaan funktiosta $f$ muuttamalla arvoa äärellisen monessa pisteessä, on välttämättä toinen funktioista $f_1$ ja $f$ epäjatkuva (äärellisen monessa pisteessä). Seuraavaksi esitetäänkin kysymys, voidaanko Laplace-muunnoksesta $F(s)$ päätellä alkuperäinen funktio $f(t)$ jos tämä oli *jatkuva*. Tässäkin yhteydessä ajaudutaan umpikujaan, sillä määritelmän mukaan Laplace-muunnos riippuu vain funktion arvoista *positiivisella* reaaliakselilla. Funktion $f$ arvoja voidaan negatiivisella reaaliakselilla siis muuttaa millä tahansa tavalla, ja näin saadulla funktiolla $f_1$ on edelleen sama Laplace-muunnos kuin alkuperäiselläkin funktiolla $f$.

Rajoitetaan siis edelleen tarkasteltavia funktioita ja kysytään seuraavaksi, voidaanko alkuperäisen funktion $f(t)$ arvot *positiivisella reaaliakselilla* päätellä Laplace-muunnoksesta $F(s)$, jos tiedetään, että $f(t)$ on jatkuva positiivisella reaaliakselilla. Tällöin kysymykseen saadaan lopulta positiivinen vastaus:

**Lause 8.** *Olkoot* $f_1$ *ja* $f_2$ *välillä* $[0, \infty)$ *jatkuvia funktioita. Jos* $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$*, niin* $f_1(t) = f_2(t)$ *kun* $t \in [0, \infty)$*.*

*Todistus.* Vaatii esitietoja, joita ei kurssilla ole esitetty, sivuutetaan.

Edellinen lause siis merkitsee sitä, että tarkasteltaessa positiivisella reaaliakselilla jatkuvia funktioita yhteys originaalifunktion ja kuvafunktion (Laplace-muunnoksen) välillä on yksikäsitteinen: Jos

$f$ on jatkuva (positiivisella reaaliakselilla), voidaan Laplace-muunnoksesta $\mathcal{L}[f]$ ainakin teoriassa päätellä alkuperäinen $f$ (positiivisella reaaliakselilla).

Sen sijaan ei ole mitään takeita, että mielivaltaisesti valittu funktio $F(s)$ olisi minkään funktion Laplace-muunnos. Fourier-muunnoksen olemassaolohan pystyttiin takaamaan vain sillä oletuksella, että funktiot lähenevät nollaa riittävän nopeasti, kun $x \to \pm\infty$, ja itse asiassa voidaan osoittaa näin tapahtuvan myös spektrille, mikäli Fourier'n integraali suppenee itseisesti. Laplace-muunnoksen olemassaololle ei kuitenkaan ole välttämätöntä, että funktio olisi nopeasti nollaa lähestyvä, vaan itse asiassa varsin voimakkaastikin kasvavilla funktioilla on Laplace-muunnos. Sen sijaan kuvafunktioilla on seuraava ominaisuus:

**Lause 9.** *Jos $F(s)$ on kuvafunktio, niin* $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0.$

*Todistus.* Sivuutetaan.

Edellisen lauseen tulos ilmaisee sen, että mikäli funktion $F(s)$ raja-arvo äärettömyydessä ei ole nolla, ei $F(s)$ ole minkään funktion $f(t)$ kuvafunktio ja siksi ei myöskään ole mielekästä yrittää löytää $F(s)$:lle originaalifunktiota. Jos sitten tarkastelu rajoitetaan sellaisiin funktioihin, jotka lähestyvät nollaa $s$:n lähestyessä ääretöntä, on tilanne toinen ja apuna voidaan käyttää käänteistä Fourier-muunnosta.

Olkoon nyt $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ ja lasketaan

$$\begin{aligned} F(x+2\pi iy) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(x+i2\pi y)t}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}e^{-2\pi iyt}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(t)H(t)e^{-xt}e^{-2\pi iyt}\,dt, \end{aligned}$$

missä $H$ on Heavisiden askelfunktio. Täten siis funktion $f(t)e^{-xt}H(t)$ Fourier-muunnos on $F(x+2\pi iy)$, jolloin $f(t)e^{-xt}H(t)$ voidaan esittää Fourier'n integraalina

$$f(t)H(t)e^{-xt} = \int_{-\infty}^\infty F(x+2\pi iy)e^{2\pi ity}\,dy.$$

Kertolaskulla saadaan

$$f(t)H(t) = \int_{-\infty}^\infty F(x+2\pi iy)e^{(x+2\pi iy)t}\,dy.$$

Kun tähän vielä sijoitetaan $s = x + 2\pi iy$, voidaan integraali kirjoittaa muotoon

$$f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

Arvoilla $t > 0$ on $H(t) = 1$ ja siis saadaan seuraava kaava.

**Lause 10 (Laplace-muunnoksen inversiokaava).** *Olkoon $F = \mathcal{L}[f]$. Tällöin*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st}\,ds,$$

*kun $t > 0$ ja $x$ suurempi kuin funktion $f$ kasvueksponentti.*

*Huomautus 2.* Inversiokaavassa esiintyvä integraali tunnetaan nimellä *Bromwichin integraali*. Inversiokaava ei anna funktion $f$ arvoja alueella $t < 0$. Tämä on väistämätöntä, koska Laplace-muunnos ei näistä arvoista riipu. Lisäksi inversiokaavassa esiintyvä $x$ voidaan valita vapaasti, kunhan se ylittää funktion $f$ kasvueksponentin.

*Huomautus 3.* Laplace-muunnosten inversiokaava selvittää ainakin osittain sen, minkälaiset funktiot $F(s)$ ovat *jonkin* originaalifunktion $f(t)$ kuvafunktioita. Ehdot ovat 1) Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|\, dy$$

suppenee, 2) $F(s) \to 0$, kun $|s| \to \infty$, edellyttäen, että $s$:n reaaliosa pysyy riittävän suurena. Mikäli nämä ehdot toteutuvat, $F$:n originaalifunktio löytyy inversiokaavaa käyttäen (yksityiskohdat sivuutetaan).

Myös Laplace-muunnoksen kääntämiselle on oma merkintänsä:

**Määritelmä 5.** Jos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ on funktion $f$ Laplace-muunnos, kutsutaan funktiota $f$ funktion $F$ *käänteiseksi Laplace-muunokseksi* ja merkitään

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$$

Laplace-muunnoksen inversiokaava antaa teoreettisen mahdollisuuden käänteismuunnoksen $\mathcal{L}^{-1}$ laskemiseksi, mutta käytännössä inversiokaavaan perustuva käänteismuunnoksen laskeminen on huomattavasti hankalampaa kuin taulukoihin perustuva menetelmä, johon tutustutaan seuraavaksi.

## 1.5 Laplace-muunnoksen kääntäminen käytännössä

Käytännössä Laplace-muunnoksen kääntäminen voidaan usein suorittaa originaalifunktio-kuvafunktio -taulukoihin perustuen. Tällöin on pyrittävä esittämään kuvafunktio taulukossa esiintyvässä muodossa.

Seuraavaan taulukkoon on laskettu Laplace-muunnospareja suoraan määritelmään perustuen. Taulukossa on merkitty $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ (vastaavasti funktion $g(t)$ Laplace-muunnoksesta on käytetty merkintää $G(s)$) ja $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$ (konvoluutio), $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$, ja $\gamma = -\int_0^{\infty} \ln t\, e^{-t}\,dt = 0{,}577215665\ldots$ (Eulerin vakio).

| | Funktio | Laplace-muunnos |
|---|---|---|
| 1 | $f(t)$ | $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ |
| 2 | $af(t) + bg(t)$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| 3 | $f(\alpha t)$ | $\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$ |
| 4 | $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - f(0+)s^{n-1} - f'(0+)s^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$ |
| 5 | $(-1)^n t^n f(t)$ | $F^{(n)}(s)$ |
| 6 | $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(q)\,dq$ |
| 7 | $\int_0^t f(u)\,du$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| 8 | $f(t-\tau)$ | $e^{-s\tau}F(s)$ |
| 9 | $e^{\lambda t}f(t)$ | $F(s-\lambda)$ |
| 10 | $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{kun } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{kun } t = 0 \\ 1 & \text{kun } t > 0. \end{cases}$ | $\frac{1}{s}$ |
| 11 | $t^n$ kun $n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 12 | $t^a$ (kun $\mathrm{Re}\, a > -1$) | $\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ |
| 13 | $e^{\lambda t}$ | $\frac{1}{s-\lambda}$ |
| 14 | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 15 | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 16 | $\sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ |
| 17 | $\cosh \omega t$ | $\frac{s}{s^2-\omega^2}$ |
| 18 | $t \sin \omega t$ | $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 19 | $t \cos \omega t$ | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 20 | $\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| 21 | $\frac{be^{-bt}-ae^{-at}}{b-a}$ | $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ |
| 22 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^n}$ |
| 23 | $\log t$ | $-\frac{\log s}{s} - \frac{\gamma}{s}$ |
| 24 | $(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$ | $F(s)G(s)$ |
| 25 | $\mathrm{erf}(\sqrt{t})$ | $\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$ |

**Matlab**in symbolisen laskennan työkaluihin on ohjelmoitu Laplace-muunnoksia ja käänteismuunnoksia:

```
>> syms t
>> laplace(t^4)

ans =

24/s^5

>>
```

```
>> syms s a
>> ilaplace(1/(s-a)^2)

ans =

t*exp(a*t)

>>
>> ilaplace(1/((s-1)*(s+2)^2))

ans =

1/9*exp(t)+1/9*(-3*t-1)*exp(-2*t)
```

## 1.6 Yleisimmät menetelmät

Laplace-muunnoksen kääntäminen tapahtuu helpoiten edellä olevaa taulukkoa ja Laplace-muunnoksen lineaarisuutta käyttämällä. Toisin sanoen, kuvafunktio $F(s)$ pyritään kirjoittamaan muotoon

$$F(s) = c_1F_1(s) + \ldots + c_nF_n(s), \tag{1.4}$$

missä $c_i$ ovat vakioita ja kuvafunktiot $F_i(s)$ löytyvät taulukon oikeanpuoleisesta sarakkeesta, siis $F_i(s) = \mathcal{L}[f_i](s)$ jollekin funktiolle $f_i$. Tällöin $F(s)$:n originaalifunktioksi saadaan

$$c_1f_1(t) + \ldots + c_nf_n(t).$$

Sopivan esityksen (1.4) löytyminen ei kuitenkaan aina ole helppoa. Sellaisen löytämiseksi voi mahdollisesti käyttää jotakin seuraavan yhteenvedon kohtaa.

1. Tarkista, onko $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. Jos näin ei ole, ei $F(s)$ ole minkään (tavallisen) funktion kuvafunktio, eikä kääntäminen onnistu.

   *Esimerkki 4.* Funktio $F(s) = \frac{s+1}{s}$ ei ole minkään reaalifunktion Laplace-muunnos.

2. Jos $F(s) = F_1(\frac{s}{a})$, missä $a > 0$ on vakio ja $F_1$ on tunnetun originaalifunktion $f_1$ kuva, saadaan taulukon 3. rivin perusteella $F(s)$:lle originaalifunktio $af_1(at)$.

   *Esimerkki 5.* Jos tunnetaan $\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}$, on

   $$\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{(\frac{s}{\omega})^2+1}$$

   ja siis

   $$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

3. Jos $F(s)$ on rationaalifunktio, voi aina etsiä osamurtohajotelman (esitellään myöhemmässä luvussa) ja soveltaa tunnettua muunnosta

   $$\mathcal{L}[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^n}.$$

   *Esimerkki 6.* Olkoon

   $$F(s) = \frac{3+2s+s^2}{(s-1)(s+2)^2}.$$

   Koska nimittäjän tekijä $s+2$ esiintyy kaksi kertaa, on osamurtohajotelma muotoa

$$\begin{aligned}\frac{3+2s+s^2}{(s-1)(s+2)^2} &= \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}\\ &= \frac{A(s+2)^2+B(s-1)(s+2)+C(s-1)}{(s-1)(s+2)^2}\\ &= \frac{(A+B)s^2+(4A+B+C)s+4A-2B-C}{(s-2)(s+2)^2},\end{aligned}$$

ja $A$, $B$ ja $C$ voidaan löytää yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} A \quad +B \qquad = 1\\ 4A \quad +B \quad +C = 2\\ 4A \quad -2B \quad -C = 3\end{cases},$$

jonka ratkaisu on $(A,B,C) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1)$. Siis

$$\frac{3+2s+s^2}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Osamurtohajotelman komponentteja varten käytetään muunnosta

$$\mathcal{L}\Big[\frac{t^{k-1}e^{at}}{(k-1)!}\Big] = \frac{1}{(s-a)^k},$$

jonka perusteella osamurtohajotelmalle voidaan löytää käänteismuunnos.
Täten esimerkiksi

$$\mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1}, \quad \mathcal{L}[e^{-2t}](s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[te^{-2t}](s) = \frac{1}{(s+2)^2},$$

ja näiden yhdistelmänä saadaan funktion $\frac{3+2s+2s^2}{(s-1)(s+2)^2}$ originaalifunktio:

$$\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} - te^{-2t}.$$

4. Jos $F(s) = F_1(s)F_2(s)$, missä $F_1(s)$:n ja $F_2(s)$:n originaalifunktiot tunnetaan: $\mathcal{L}[f_1] = F_1(t)$ ja $\mathcal{L}[f_2] = F_2(s)$, $F$:n originaalifunktiota **ei saada muodossa** $f_1 f_2$, vaan muodossa $f_1 * f_2$ (konvoluutio), kuten taulukossa mainitaan. Yleisesti ottaen konvoluution määritelmä vaikuttaa hankalalta:
$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du \quad \Big( = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du = (g*f)(t)\Big),$$
mutta joidenkin funktioiden kanssa laskettu konvoluutio on kuitenkin verrattain yksinkertainen (esim. seuraava kohta).
5. Jos kuvafunktio on muotoa $\frac{1}{s}F(s)$, missä $F$:n originaalifunktio $f$ tunnetaan, saadaan $\frac{1}{s}F(s)$:n originaalifunktio paitsi konvoluutiona $(H*f)(s)$ ($H$ on Heavisiden funktio), myös integraalina
$$\int_0^t f(u)\,du,$$
mikä on itse asiassa sama asia kuin mainittu konvoluutio $H*f$ (tarkista).

   *Esimerkki 7.* Taulukon mukaan $\mathcal{L}[\sinh](s) = \frac{1}{s^2-1}$, joten funktion $\frac{1}{s}\frac{1}{s^2-1}$ originaalifunktio saadaan integroimalla:
$$\int_0^t \sinh u\,du = \Big/_0^t \cosh u = \cosh t - 1.$$
6. Edellistä kohtaa voidaan soveltaa toistuvasti: Määrätään ensin funktion $F_1(s) = \frac{1}{s}F(s)$ originaalifunktio $f_1(t)$, minkä jälkeen funktion $\frac{1}{s^2}F(s) = \frac{1}{s}F_1(t)$ originaalifunktio saadaan integraalina

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(u)\,du.$$

*Esimerkki 8.* Funktion $F(s) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2-1}$ originaalifunktio on edellisen esimerkin perusteella

$$\int_0^t (\cosh u - 1)\,du = \Big/_0^t (\sinh u - u) = \sinh t - t.$$

7. Eksponenttifunktio $e^{-s\tau}$ ei ole minkään tavallisen funktion kuvafunktio, joten muotoa $e^{-s\tau}F(s)$ olevia funktioita ei voida käsitellä tavanomaisten funktioiden konvoluution avulla. Sen sijaan taulukon rivin 8 mukaan funktion $e^{-s\tau}F(s)$ originaalifunktio on $f(t-\tau)$, jos $\mathcal{L}[f] = F$. Toisaalta eksponenttifunktio $e^{-s\tau}$ on yleistetyn funktion $\delta(t-\tau)$ Laplace-muunnos (kts. delta-funktiota koskeva luku), ja samaan tulokseen päädyttäisiin laskemalla konvoluutio deltafunktion kanssa muodollisesti.

   *Esimerkki 9.* Etsittävä originaalifunktio funktiolle $\frac{1}{(s-4)^3}$ (löytyy tosin myös taulukosta). Aluksi todetaan, että $\mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2](s) = \frac{1}{s^3}$, ja tästä saadaan $\mathcal{L}[e^{4t}\frac{1}{2}t^2](s) = \frac{1}{(s-4)^3}$.

8. Jos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, missä $f$ on derivoituva ja $f(0+) = \lim_{h\to 0+} f(h) = 0$, saadaan muotoa $sF(s)$ olevalle funktiolle originaalifunktio käyttämällä derivointisääntöä (taulukon rivi 4): $\mathcal{L}[f'](s) = sF(s)$, joten $sF(s)$:n originaalifunktio on $f'$. Myös tätä kohtaa voidaan soveltaa toistuvasti.

   *Esimerkki 10.* Tiedetään, että $\mathcal{L}[\sin](s) = \frac{1}{s^2+1}$ ja $\sin(0+) = \sin 0 = 0$. Täten funktiolle $\cos t = \frac{d}{dt}\sin t$ pätee $\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{s}{s^2+1}$.

9. Jos $F(s)$ voidaan kirjoittaa funktion $F_1$ (jolle originaalifunktio $f_1$ tunnetaan) derivaattana $F_1'(s) = F(s)$, saadaan $F(s)$:lle originaalifunktio $-tf_1(t)$, sillä taulukon rivin 5 perusteella $\mathcal{L}[-tf_1(t)] = F_1' = F$.
10. Jos puolestaan $F'(s) = F_2(s)$, missä $F_2$:n originaalifunktio $f_2$ tunnetaan, merkitään $F$:n (toistaiseksi tuntematonta) originaalifunktiota $f$:llä. Tällöin $\mathcal{L}[-tf(t)] = F' = F_2 = \mathcal{L}[f_2(t)]$, mistä saadaan $-tf(t) = f_2(t)$ ja siis $f(t) = -\frac{f_2(t)}{t}$.

    *Esimerkki 11.* Funktiolle $F(s) = \ln\frac{s+1}{s}$ saadaan $F'(s) = \frac{s}{s+1}\frac{s-(s+1)}{s^2} = -\frac{1}{s(s+1)}$. Funktiolla $\frac{1}{s+1}$ on originaalifunktio $e^{-t}$, joten funktiolle $\frac{1}{s}\frac{1}{s+1}$ sellainen saadaan kohdan 5 mukaan integroimalla:

$$\int_0^t e^{-u}\,du = \Big/_0^t -e^{-u} = 1 - e^{-t},$$

siis $\mathcal{L}[e^{-t} - 1] = -\frac{1}{s}\frac{1}{s+1}$. Jos siis $F(s)$:n originaalifunktio on $f(t)$, on

$$\mathcal{L}[-tf(t)](s) = F'(s) = -\frac{1}{s(s+1)} = \mathcal{L}[e^{-t} - 1],$$

mistä

$$f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

*Esimerkki 12.* Selvitetään, minkä funktion Laplace-muunnos $F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$ on. Taulukosta nähdään, että $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, joten $\mathcal{L}[t](s) = \frac{1!}{s^2}$ ja $\mathcal{L}[t^3](s) = \frac{3!}{s^4}$. Tällöin siis $\mathcal{L}[\frac{1}{6}t^3](s) = \frac{1}{s^4}$, ja $\mathcal{L}[t + \frac{1}{6}t^3](s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$. Näin ollen

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4})(t) = t + \frac{1}{6}t^3.$$

Laplace-muunnosten kääntämisessä saattaa useiden ominaisuuksien soveltaminen olla tarpeen:

*Esimerkki 13.* Lasketaan $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s^2}{(s+1)^4})$. Lähdetään liikkeelle tiedosta $\mathcal{L}[t^3](s) = \frac{3!}{s^4}$, jolloin siis $\mathcal{L}[\frac{t^3}{3!}] = \frac{1}{s^4}$. Tähän voidaan puolestaan soveltaa eksponenttifunktiolla kertomista, jonka mukaan $\mathcal{L}[e^{-t}\frac{t^3}{3!}](s) =$

$\frac{1}{(s+1)^4}$. Edelleen derivoimalla saadaan $\mathcal{L}[\frac{1}{6}e^{-t}(3t^2 - t^3)](s) = \frac{s}{(s+1)^4}$, ja derivointi vielä kertaalleen antaa $\mathcal{L}[te^{-t}(1 - 6t + \frac{1}{6}t^2)](s) = \frac{s^2}{(s+1)^4}$, mistä käänteismuunnos voidaan suoraan lukea.

*Esimerkki 14.* Olkoon $F(s) = \frac{s+1}{s}$. Tätä funktiota vastaavaa originaalifunktiota ei ole, koska $F(s)$ ei lähene nollaa, kun $s \to \infty$ (vrt. lause 9).

*Esimerkki 15.* Ratkaistaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$y'' + 4y = t \tag{1.5}$$

alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 2$. Nyt $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - s - 2$ ja (1.5) saadaan siis Laplace-muunnoksilla muotoon

$$s^2Y(s) - s - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

mistä voidaan ratkaista

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{4}(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4})$$

Originaalifunktio saadaan taulukosta: $y(t) = \cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{2}\sin 2t) = \cos 2t + \frac{7}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t$.

Edellinen esimerkki sisälsi perustelemattomia oletuksia, kuten sen, että alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on originaalifunktio ja nollassa jatkuva oikealta. Myöskään ei tarkasteltu sitä, missä alueessa Laplace-muunnos oli määritelty. Sovellusten kannalta näillä heikkouksilla ei kuitenkaan ole yleensä merkitystä, sillä kun differentiaaliyhtälön ratkaisu on saatu, voidaan sen oikeellisuus tarkistaa ja määrittelyjoukko löytää yleensä melko helposti. Ratkaistaessa differentiaaliyhtälöitä Laplace-muunnosten avulla tehdään ratkaisusta yleensä äskeisen esimerkin oletukset.

*Esimerkki 16.* Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y' - 3y = 8e^{2t}$$

alkuehdolla $y(0) = 2$. Laplace-muunnokset laskemalla saadaan tällöin

$$sY(s) - 2 - 3Y(s) = \frac{8}{s-2},$$

mistä voidaan ratkaista $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s+4}{(s-3)(s-2)}.$$

Näin saadulle lausekkeelle löytyy osamurtohajotelma (kts. Erillinen liite osamurtohajotelmista):

$$\frac{2s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{10}{s-3} - \frac{8}{s-2},$$

minkä avulla originaalifunktio voidaan määrätä:

$$y(t) = 10e^{3t} - 8e^{2t}.$$

*Esimerkki 17.* Ratkaistaan

$$y'' + 3y' - 4y = e^{3t}$$

alkuehdoilla $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. Laplace-muunnoksilla saadaan

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 3(sY(s) - 2) - 4Y(s) = \frac{1}{s-3},$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$(s^2 + 3s - 4)Y(s) - 2s - 7 = \frac{1}{s-3}$$

ja edelleen

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s - 20}{(s^2 + 3s - 4)(s - 3)} = \frac{2s^2 + 2 - 20}{(s - 1)(s + 4)(s - 3)}$$

Tälle löytyy osamurtohajotelma

$$Y(s) = \frac{17}{10}\frac{1}{s-1} + \frac{8}{35}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{14}\frac{1}{s-3},$$

josta voidaan määrätä originaalifunktio:

$$y(t) = \frac{17}{10}e^t + \frac{8}{25}e^{-4t} + \frac{1}{14}e^{3t}.$$

*Esimerkki 18.* Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y'' + y = \cos t$$

alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$. Laplace-muunnokset laskemalla saadaan

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

mistä

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin](s)\mathcal{L}[\cos](s) = \mathcal{L}[\sin * \cos](s),$$

jolloin siis $y(t) = (\sin * \cos)(t) = \frac{1}{2}t\sin t$.

Tämän esimerkin originaalifunktio $y(t)$ voidaan selvittää myös suoraan taulukosta.

Laplace-muunnosten sovellusalue ulottuu myös lineaarisia differentiaaliyhtälöitä kauemmaksi, kuten seuraavasta esimerkistä ilmenee.

*Esimerkki 19.* Ratkaistaan differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y' + 4y + 4z = 0 \\ z' + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

alkuehdoilla $y(0) = 3$, $z(0) = 15$. Laplace-muunnettu pari on muotoa

$$\begin{cases} sY(s) - 3 + 4Y(s) + 4Z(s) = 0 \\ sZ(s) - 15 + 2Y(s) + 6Z(s) = 0, \end{cases}$$

mistä voidaan ratkaista

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{3s-42}{s^2+10s+16} = -\frac{8}{s+2} + \frac{11}{s+8} \\ Z(s) = \frac{15s+54}{s^2+10s+16} = \frac{4}{s+2} + \frac{11}{s+8} \end{cases}$$

Vastaavat originaalifunktiot ovat

$$\begin{cases} y(t) = -8e^{-2t} + 11e^{-8t} \\ z(t) = 4e^{-2t} + 11e^{-8t}. \end{cases}$$

Laplace-muunnokset eivät kuitenkaan ole yksinkertaisin tapa ratkaista tämänlaisia DY-pareja. Laskennallisesti parempaan menetelmään tutustutaan myöhemmin.

# Luku 2
# Rationaalifunktion antiderivaatta

## 2.1 Yleisimmät tapaukset

Palautetaan mieleen, että rationaalifunktiolla tarkoitetaan muotoa $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ olevaa funktiota, jossa $p(x)$ ja $q(x)$ ovat polynomeja. Antiderivaatan

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

määrittäminen derivointisääntöihin perustuen ei ole suoraviivaista, sillä tätä varten pitää löytää derivointisääntöjä, jotka tuottavat tulokseksi osamäärän. Tällaisia ovat mm.

- $\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)^n} = -\frac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}$.

*Esimerkki 20.* $\int \frac{4x+3}{(2x^2+3x-1)^2}\, dx = -\frac{1}{(2x^2+3x-1)} + C$

*Esimerkki 21.* Lasketaan $\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx$. Tätä varten voidaan kirjoittaa

$$\frac{3x}{x^2+1} = \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1},$$

joten

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

*Esimerkki 22.* Lasketaan

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & \text{jos } n \neq 1 \\ \ln(x-a) + C & \text{jos } n = 1 \end{cases}$$

*Esimerkki 23.* Lasketaan

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\, dx.$$

Nimittäjällä ei ole reaalisia nollakohtia, mutta neliöksi täydentämällä saadaan

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right).$$

Kun sijoitetaan $t = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow x = 2t+1$, saadaan integraalin arvoksi

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\, dx = \int \frac{1}{4(t^2+1)} \cdot 2\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.$$

Rationaalifunktion antiderivatta voidaan periaatteessa aina löytää osamurtohajotelmien avulla sekä soveltamalla ja laajentamalla ylläolevia esimerkkejä. Tässä yhteydessä ei ole kuitenkaan tarpeen selvittää asiaa perinpohjin, vaan tyydytään asian käsittelyyn esimerkin valossa.

*Esimerkki 24.* Määritetään antiderivaatta

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 3x + 5}\,dx.$$

**Vaihe 1.** Jakolasku suorittamalla saadaan

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x-1)(x^3 - x^2 + 3x + 5) + (-2x^2 - x + 6),$$

jolloin siis

$$I = \int (x-1)\,dx + \int \frac{-2x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 3x + 5}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{-2x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 3x + 5}\,dx,$$

ja siirrytään tarkastelemaan viimeksi esiintyvää antiderivaattaa.

**Vaihe 2.** Etsitään nimittäjän nollakohdat. Todetaan aluksi, että $x = -1$ on yksi nimittäjän nollakohta, joten nimittäjä on jaollinen lausekkeella $x - (-1) = x + 1$. Jakolasku antaa $x^3 - x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(x^2 - 2x + 5)$, ja koska $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, ei toisen asteen lausekkeella ole reaalista nollakohtaa.

**Vaihe 3.** Etsitään lausekkeen $\frac{-2x^2-x+6}{x^3-x^2+3x+5}$ osamurtohajotelma. Nimittäjien tekijöiden perusteella hajotelma on muotoa

$$\frac{-2x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 3x + 5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}. \tag{2.1}$$

Etsitään luvut $A$, $B$ ja $C$. Tätä varten yllä olevan yhtälön oikean puolen osamäärät lavennetaan samannimisiksi ja lasketaan yhteen, jolloin oikeaksi puoleksi saadaan

$$\frac{(A+B)x^2 + (-2A + B + C)x + 5A + C}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

Täten pitäisi olla $A + B = -2$, $-2A + B + C = -1$ ja $5A + C = 6$. Näin saatu yhtälöryhmä ratkaisemalla saadaan $A = \frac{5}{8}$, $B = -\frac{21}{8}$ ja $C = \frac{23}{8}$.

Kysytty osamurtohajotelma on siis

$$\frac{-2x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 3x + 5} = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{x+1} + \frac{-21x + 23}{x^2 - 2x + 5}\right),$$

**Vaihe 4.** Viimeksi saadun lausekkeen ensimmäinen osa ei tuota ongelmia:

$$\int \frac{5}{x+1}\,dx = 5\ln|x+1| + C,$$

joten kiinnitetään huomio jälkimmäiseen osaan. Kirjoitetaan lauseke kahteen osaan:

$$\frac{-21x + 23}{x^2 - 2x + 5} = \frac{-21}{2} \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5} + 2\frac{1}{x^2 - 2x + 5}$$

Tämänkin lausekkeen ensimmäisen osan käsittely on helppoa:

$$\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}\,dx = \ln\left|x^2 - 2x + 5\right|,$$

joten selvitettäväksi jää, miten

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$$

määritetään. Neliöksi täydentämisellä saadaan $x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 2^2$ ja sijoitus $t = x - 1$ antaa

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx = \int \frac{1}{t^2 + 2^2}\, dt = \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C,$$

ja palaamalla muuttujaan $x$ saadaan siis

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C.$$

Yhdistämällä kaikki osatulokset saadaan alkuperäiselle funktiolle antiderivaatta.

## 2.2 Kaikki tapaukset

Olkoot $p(x)$ ja $q(x)$ reaalikertoimisia polynomeja ja tarkastellaan miten rationaalifunktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ antiderivaatta voidaan löytää. Osoittautuu, että tällaisen funktion antiderivaatta voidaan aina löytää (ainakin periaatteessa), ja sen määrittäminen tapahtuu neljässä vaiheessa. Oletetaan aluksi, että polynomin $q(x)$ aste on vähintään yksi, koska $q$:n asteen ollessa yksi on $q$ vakio ja $f$ polynomi, ja polynomifunktion antiderivaatta on helposti määritettävissä.

**Vaihe 1.** Jos osoittaja $p(x)$ on vähintään yhtä korkeaa astetta kuin nimittäjä $q(x)$, suoritetaan jakolasku $p(x) = a(x)q(x) + r(x)$, missä $a(x)$ on osamäärä ja $r(x)$ jakojäännös (jonka aste on siis korkeintaan jakajan $q(x)$). Tällöin siis

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

missä $a(x)$ on polynomi. Näin ollen

$$\int f(x)\, dx = \int a(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\, dx,$$

josta osa

$$\int a(x)\, dx$$

voidaan määrittää helposti. Täten päästään aina tilanteeseen, missä osoittajan aste on nimittäjän astetta pienempi. Oletetaan siis tästedes, että näin on asian laita.

**Vaihe 2.** Jaetaan nimittäjä $q(x)$ reaalisiin alkutekijöihin. Jokaista $q(x)$:n reaalista nollakohtaa $a$ kohti polynomilla $q(x)$ on ensimmäisen asteen tekijä $x - a$. Jos polynomilla $q(x)$ on kompleksinen nollakohta $x = \alpha + \beta i$, niin myös tämän liittoluku $x = \alpha - \beta i$ on $q(x)$:n nollakohta Näitä nollakohtia vastaa polynomin $q(x)$ toisen asteen reaalinen tekijä $(x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i)) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$, missä $p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0$. Polynomilla $q(x)$ on siis olemassa tekijähajotelma

$$q(x) = c(x - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

**Vaihe 3.** Jaetaan $\frac{p(x)}{q(x)}$ osamurtoihin. Osamurtokehitelmä on summalauseke, jossa esiintyy muotoa $\frac{A}{(x-a)^i}$ ja $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ olevia summattavia seuraavan säännön mukaan:

- $q(x)$:n tekijää $(x-a)^k$ vastaa summa

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

- $q(x)$:n tekijää $(x^2 + px + q)^l$ vastaa summa

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Kertoimet $A_i$, $B_i$ ja $C_i$ voidaan löytää mm. määräämättömien kertoimien menetelmällä (tästä esimerkki myöhemmin).

**Vaihe 4.** Osamurtokehitelmässä on muotoa $\frac{A}{(x-a)^i}$ ja $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}$ $(p^2-4q<0)$ olevia termejä, joiden antiderivaatta tulee siis löytää.

Ensiksi voidaan todeta, että

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|$$

ja

$$\int\frac{A}{(x-a)^i}\,dx = -\frac{A}{i-1}\frac{1}{(x-a)^{i-1}},$$

kun $i>1$. Tarkastellaan sitten antiderivaattaa

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{Bx+B\frac{p}{2}}{x^2+px+q}\,dx+\int\frac{C-B\frac{p}{2}}{x^2+px+q}\,dx.$$

Viimeisimmässä hajotelmassa ensimmäinen antiderivaatta voidaan määrittää helposti, koska se voidaan kirjoittaa muotoon, missä osoittaja on nimittäjän derivaatta:

$$\int\frac{Bx+B\frac{p}{2}}{x^2+px+q}\,dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|.$$

Jälkimmäisen osan kohdalla täydennetään $x^2+px+q$ neliöksi: $x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+(\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$ $=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$ Koska $q-\frac{p^2}{4}>0$, voidaan kirjoittaa $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ ja sijoituksella $t=x+\frac{p}{2}$ saadaan

$$\int\frac{1}{x^2+px-q}\,dx=\int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}\,dx=\int\frac{1}{t^2+a^2}\,dt=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a},$$

mistä alkuperäiseen muuttujaan palaamalla saadaan

$$\int\frac{1}{x^2+px-q}\,dx=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Lopuksi tarkastellaan antiderivaattaa

$$J=\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}\,dx,$$

missä $j>2$ ja $p^2-4q<0$. Jaetaan tämäkin kahteen osaan:

$$J=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^j}\,dx+\left(C-B\frac{p}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^j}\,dx,$$

joista ensimmäinen on helppo määrittää:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^j}\,dx=-\frac{1}{j-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{j-1}}.$$

Jälkimmäisen osion määrittämiseksi täydennetään $x^2+px+q$ neliöksi kuten edellä, tehdään sijoitus $t=x+\frac{p}{2}$ ja merkitään $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, jolloin tarkasteltavaksi jää

$$\int\frac{1}{(t^2+a^2)^j}\,dt.$$

Tähän sovelletaan palautuskaavaa (matematiikan laitoksen kaavakokoelma)

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^j}\,dt = \frac{1}{2(j-1)a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{j-1}} + \frac{2j-3}{2j-2}\cdot\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{j-1}}\,dt,$$

jolloin lopulta päädytään lausekkeeseen

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}.$$

# Luku 3
# Polynomien jaollisuus

Tässä luvussa tarkasteltavat polynomit ovat joko reaali- tai kompleksilukukertoimisia. Reaalikertoimisten polynomien joukosta käytetään merkintää $\mathbb{R}[x]$ ja kompleksikertoimisten polynomien joukosta $\mathbb{C}[x]$ (jos polynomin muuttuja on $z$, on myös joukon merkintä $\mathbb{C}[z]$) Polynomin $p$ asteesta käytetään merkintää $\deg(p)$ ja polynomien tulolle pätee $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$. Nollapolynomin asteesta käytetään symbolista merkintää $\deg(0) = -\infty$.

**Määritelmä 6.** Polynomi $q$ on *jaollinen* polynomilla $p$, tai *$p$ jakaa $q$:n* tai *$p$ on $q$:n tekijä*, merkitään $p \mid q$, mikäli $q = pr$ jollekin polynomille $r$.

*Esimerkki 25.* $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, joten $x^2 - 1$ on jaollinen polynomeilla $x - 1$ ja $x + 1$. Toisaalta $x^2 - 1 = 2(x+1)\frac{1}{2}(x-1)$, joten $x^2 - 1$ on jaollinen myös polynomeilla $2(x+1)$ ja $\frac{1}{2}(x-1)$.

Itse asiassa, jos $q$ on jaollinen polynomilla $p$, siis $q = pr$, ja $c \neq 0$ on vakio, voidaan kirjoittaa myös $q = cp \cdot c^{-1} r$, joten $q$ on jaollinen myös polynomilla $cp$. Sama idea ei toimi, jos $c$ on polynomi, jonka aste on suurempi kuin 0, sillä tällöin $c^{-1}$ ei ole polynomi.

Kuten edellisestä esimerkistä huomataan, polynomien jaollisuuskäsitteissä $p$ ja $cp$, missä $c$ on nollasta poikkeava vakio, ovat samankaltaisessa asemassa.

*Esimerkki 26.* Koska $\deg(p(x)q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$, on ensimmäisen asteen polynomin $ax + b$ tekijöistä toinen välttämättä vakio. Täten siis ensimmäisen asteen polynomin ainoa vakiosta poikkeava tekijä on polynomi itse.

**Määritelmä 7.** Polynomien $p$ ja $q$ *suurin yhteinen tekijä* $\mathrm{syt}(p,q)$ on polynomi $d$, joka toteuttaa ehdot

1. $d \mid p$ ja $d \mid q$ ($d$ jakaa sekä $p$:n että $q$:n).
2. Jos $d' \mid p$ ja $d' \mid q$, niin $d' \mid d$.

Jos polynomi $d$ toteuttaa ylläolevat ehdot, niin tällöin myös mikä hyvänsä $d$:stä nollasta poikkeavalla vakiolla kertomalla saatava polynomi toteuttaa myös ne, joten polynomeille $\mathrm{syt}(p,q)$ ei ole yksikäsitteisesti määrätty. Voidaan kuitenkin todistaa, että $\mathbb{R}[x]$:n ja $\mathbb{C}[x]$:n polynomeille $\mathrm{syt}(p,q)$ määräytyy *vakiotekijää vaille* yksikäsitteisesti, siis jos $d_1$ ja $d_2$ molemmat toteuttavat syt:n määritelmän ehdot, niin $d_1$ ja $d_2$ saadaan toisistaan nollasta poikkeavalla vakiolla kertomalla.

*Esimerkki 27.* $\mathrm{syt}(x-1, x+1) = 1$, koska esimerkin 26 mukaan $x - 1$ ja $x + 1$ eivät voi jakaa toisiaan. Edellisten esimerkkien valossa voidaan toisaalta yhtä hyvin kirjoittaa $\mathrm{syt}(x-1, x+1) = c$, missä $c \neq 0$ on mikä hyvänsä nollasta poikkeava vakio, mutta tapana on käyttää merkintää $\mathrm{syt}(x-1, x+1) = 1$.

Polynomien suurimman yhteisen tekijän löytämiseksi voidaan käyttää samanlaista menettelyä kuin kokonaislukujen tapauksessa. Prosessi tunnetaan nimellä *Eukleideen algoritmi* ja on varhaisin tunnettu algoritminen menetelmä.

**Eukleideen algorithmi polynomien syt:n löytämiseksi**

*Syöte: Polynomit p ja q*
*Tuloste:* $\mathrm{syt}(p,q)$

1. Jos $\deg(p) < \deg(q)$, vaihdetaan merkintöjä $p \leftrightarrow q$, minkä jälkeen $\deg(p) \geq \deg(q)$.
2. Jos $q = 0$, annetaan vastaus $\mathrm{syt}(p,q) = p$ ja päätetään prosessi. Jos $\deg(q) = 0$, annetaan vastaus $\mathrm{syt}(p,q) = 1$ ja päätetään prosessi.
3. Jos $\deg(q) \geq 1$, suoritetaan jakolasku $p = aq + r$ ($a$ on osamäärä ja $r$ jakojäännös, $\deg(r) < \deg(q)$). Tällöin $\mathrm{syt}(p,q) = \mathrm{syt}(q,r)$, ja jälkimmäinen syt määritetään tätä samaa menetelmää käyttäen.

*Esimerkki 28.* Lasketaan $\mathrm{syt}(x^3 - 1, x^2 - 1)$. Ensimmäinen jakolasku antaa

$$x^3 - 1 = x(x^2 - 1) + x - 1,$$

siis osamäärä on $x$ ja jakojäännös $x - 1$. Tällöin $\mathrm{syt}(x^3 - 1, x^2 - 1) = \mathrm{syt}(x^2 - 1, x - 1)$, minkä selvittämiseksi suoritetaan uusi jakolasku:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

missä osamäärä on $x + 1$ ja jakojäännös 0. Tällöin $\mathrm{syt}(x^2 - 1, x - 1) = \mathrm{syt}(x - 1, 0)$, ja vastaus $x - 1$ saadaan suoraan menetelmän toisesta vaiheesta.

*Esimerkki 29.* Lasketaan $\mathrm{syt}(x^3 - 1, x^3 + 1)$. Ensimmäinen jakolasku antaa

$$x^3 - 1 = 1 \cdot (x^3 + 1) - 2,$$

missä siis 1 on osamäärä ja $-2$ jakojäännös. Tällöin siis $\mathrm{syt}(x^3 - 1, x^3 + 1) = \mathrm{syt}(x^3 + 1, 2) = 1$.

**Määritelmä 8.** Polynomi $p$ on *jaoton*, jos se ei ole vakiopolynomi ja sillä ei ole muita tekijöitä kuin $p$ ja 1 (vakiokerroin $\neq 0$ huomioituna). Muulloin $p$ on *jaollinen*.

*Esimerkki 30.* Polynomi $x - 1$ on jaoton, koska esimerkin 26 mukaan sen kaikki tekijät ovat muotoa $c(x - 1)$, missä $c \neq 0$ tai vakioita. Polynomi $x^2 - 1$ ei ole jaoton, koska sillä on tekijä $x - 1$, joka ei ole vakio, ja josta alkuperäistä polynomia ei saada vakiolla kertomalla.

Polynomin jaollisuus voi kuitenkin riippua siitä, missä joukossa tekijöiden halutaan olevan. On mahdollista, että sama polynomi on jaoton joukossa $\mathbb{R}[x]$, mutta jaollinen joukossa $\mathbb{C}[x]$.

*Esimerkki 31.* Tarkastellaan, onko $x^2 + 1$ jaollinen joukossa $\mathbb{R}[x]$. Jos näin olisi, pitäisi sillä olla ensimmäisen asteen tekijä $x + a \in \mathbb{R}[x]$ (johtava kerroin voidaan olettaa ykköseksi). Tällöin pitäisi olla myös toinen tekijä $x + b \in \mathbb{R}[x]$, joille pätee

$$x^2 + 1 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

siis $a + b = 0$ ja $ab = 1$. Edellisestä yhtälöstä saadaan $b = -a$ ja sijoittamalla tämä jälkimmäiseen $a^2 = -1$, mikä ei toteudu millekään reaaliluvulle $a$, mutta toteutuu kompleksiluvulla $a = i$. Polynomi $x^2 + 1$ on siis jaoton joukossa $\mathbb{R}[x]$, mutta jaollinen joukossa $\mathbb{C}[x]$: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.

Itse asiassa polynomin $x^2 + 1$ jaottomuus yli reaalilukujen juontaa juurensa yleisemmästä periaatteesta, jonka mukaan polynomin ensimmäisen asteen tekijät ja nollakohdat vastaavat toisiaan täydellisesti. Tämän ilmaisee kompleksilukujen yhteydessä esitetty lause:

Jos $p(a) = 0$, niin $p(x)$ on jaollinen polynomilla $x - a$.

Edellisen lauseen mukaan siis polynomin $p$ hajottaminen ensimmäisen asteen tekijöihin on yhtä hankala tehtävä kuin $p$:n nollakohtien löytäminen. Nollakohtia ei aina voida löytää algebrallisesti, vaikka nollakohtien *olemassaolo* voidaan taata Algebran peruslauseen mukaan.

Polynomille $p(z)$ saadaan lopulta esitys

$$p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n) p_n(z),$$

missä $p_n(z) = c$ on vakio ja siis

$$p(z) = c(z - z_1) \dots (z - z_n) \tag{3.1}$$

Esitys (3.1) ratkaisee täydellisesti kysymyksen siitä, mitkä ovat kompleksikertoimisen polynomin jaottomat tekijät:

Jokainen kompleksikertoiminen polynomi jakautuu ensimmäisen asteen tekijöihin $z - z_k$, joille lisäksi pätee $\mathrm{syt}(z - z_k, z - z_l) = 1$, jos $z_k \neq z_l$ ja $\mathrm{syt}(z - z_k, z - z_k) = z - z_k$.

Tämä ei pidä paikkansa reaaliluvuille, kuten nähtiin esimerkissä 31: polynomi $x^2 + 1$ on jaoton joukossa $\mathbb{R}[x]$. Joukon $\mathbb{C}[x]$ polynomien jaollisuudesta voidaan kuitenkin johtaa myös tuloksia reaalikertoimisten polynomien jaollisuuteen.

**Lause 11.** *Jos polynomilla $p \in \mathbb{R}[x]$ on nollakohta $w \in \mathbb{C}$, niin myös kompleksikonjugaatti $\overline{w}$ on polynomin $p$ nollakohta.*

*Todistus.* Merkitään $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, missä $c_i \in \mathbb{R}$. Tällöin suoraan sijoittamalla saadaan $p(\overline{w}) = c_n \overline{w}^n + c_{n-1} \overline{w}^{n-1} + \dots + c_1 \overline{w} + c_0$. Koska jokainen kerroin $c_i$ on reaalinen, on $\overline{c_i} = c_i$, mistä seuraa, että $p(\overline{w}) = \overline{p(w)} = 0$.

Edellisen lauseen mukaan *reaalikertoimisen* polynomin kompleksiset nollakohdat esiintyvät pareittain: Jos $w$ on nollakohta (mitä kutsutaan myös *juureksi*), niin myös $w$:n kompleksikonjugaatti $\overline{w}$ on. Tarkastellaan siis minkälainen on reaalikertoimisen polynomin $p(x)$ algebran peruslauseesta seuraava hajotelma:

$$p(x) = c(x - x_1) \dots (x - x_k)(x - w_1)(x - \overline{w_1}) \dots (x - w_l)(x - \overline{w_l}), \tag{3.2}$$

missä $x_1, \dots x_k$ ovat polynomin $p$ reaaliset juuret ja $w_1, \overline{w_1}, \dots, w_l, \overline{w_l}$ sen kompleksiset juuret. Tarkasteltaessa paria $(x - w_i), (x - \overline{w_i})$ huomataan, että polynomilla

$$(x - w_i)(x - \overline{w_i}) = x^2 - (w_i + \overline{w_i})x + w_i \overline{w_i}$$

on reaaliset kertoimet. Tämä nähdään siitä, että $\overline{w_i + \overline{w_i}} = \overline{w_i} + w_i$ ja $\overline{w_i \overline{w_i}} = \overline{w_i} w_i$. Tällöin siis merkitsemällä $u_i = w_i + \overline{w_i}$ ja $v_i = w_i \overline{w_i}$ saadaan

$$(x - w_i)(x - \overline{w_i}) = x^2 + u_i x + v_i,$$

jolloin myös polynomille $p$ saadaan reaalikertoiminen hajotelma kertomalla kukin tekijä $x - w_i$ konjugaattitekijänsä $x - \overline{w_i}$ kanssa:

$$p(x) = c(x - x_1) \dots (x - x_k)(x^2 + u_1 x + v_1) \dots (x^2 + u_l x + v_l). \tag{3.3}$$

On lisäksi huomattava, että kukin tekijä $x^2 + u_i x + v_i = (x - w_i)(x - \overline{w_i})$ on jaoton $\mathbb{R}[x]$:ssä, sillä jaollisuudesta yli $\mathbb{R}$:n seuraisi reaalinen nollakohta. Edelleen voidaan todeta, että esityksessä (3.3)

$\mathrm{syt}(x-x_i, x-x_j) = 1$, jos $x_i \neq x_j$ ja $\mathrm{syt}(x^2+u_ix+v_i, x^2+u_jx+v_j) = \mathrm{syt}((x-w_i)(x-\overline{w_i}), (x-w_j)(x-\overline{w_j})) = 1$, jos $w_i \neq w_j$. Yhteenvetona voidaan siis mainita:

Jokainen reaalikertoiminen polynomi jakautuu korkeintaan astetta kaksi oleviin jaottomiin tekijöihin $\mathbb{R}[x]$:ssä.

## 3.1 Menetelmiä tekijöihinjakoon

Edellä esitetyn lauseen perusteella polynomin $p$ ensimmäisen asteen tekijä voidaan löytää polynomin $p$ nollakohdan avulla.

*Esimerkki 32.* Jaetaan polynomi $x^2 + 3x + 1$ tekijöihin. Nollakohdat ovat $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, joten

$$x^2 + 3x + 1 = \left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Yli neljännen asteen polynomeille ei kuitenkaan ole välttämättä olemassa algebrallista ratkaisua, siis sellaista, jossa nollakohta voitaisiin esittää polynomin kertoimista saatavana lausekkeena yhteen-, kerto-, vähennys- ja jakolaskun sekä juurenoton avulla. Toisaalta taas rationaalisia nollakohtia voidaan etsiä kokeilemalla seuraavaan lauseeseen perustuen:

**Lause 12.** *Olkoon*

$$p(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$$

*kokonaislukukertoiminen polynomi. Jos $p(x)$:llä on rationaalinen juuri $r = \frac{p}{q}$, missä* $\mathrm{syt}(p, q) = 1$*, niin silloin osoittaja $p$ jakaa vakiokertoimen $c_0$ ja nimittäjä $q$ korkeimman asteen kertoimen $c_n$.*

*Todistus.* Koska $r = \frac{p}{q}$ on nollakohta, on

$$0 = c_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + c_1\frac{p}{q} + c_0,$$

ja kertomalla yhtälö puolittain luvulla $q^n$ saadaan

$$0 = c_np^n + c_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + c_1pq^{n-1} + c_0q^n, \tag{3.4}$$

ja $c_0q^n$ toiselle puolelle siirtämällä saadaan

$$-c_0q^n = c_np^n + c_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + c_1pq^{n-1}.$$

Tästä nähdään, että $p$ jakaa luvun $c_0q^n$. Koska $\mathrm{syt}(p, q) = 1$, ei $p$ voi jakaa lukua $q^n$, siis $p$ jakaa luvun $c_0$. Siirtämällä yhtälössä (3.4) $c_np^n$ toiselle puolelle nähdään samalla tavalla, että $q$ jakaa luvun $c_n$.

*Esimerkki 33.* Olkoon $p(x) = 6x^3 - 37x^2 + 72x - 45$. Jos $p(x)$:llä on rationaalijuuri $r = \frac{p}{q}$, on $q \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ (luvun 6 tekijät) ja $p \in \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm9, \pm15, \pm45\}$ (luvun 45 tekijät). Kokeilemalla eri vaihtoehtoja havaitaan, että esim $p(3) = 0$, jolloin siis $x - 3$ jakaa polynomin $p(x)$. Jakolaskulla saadaan $p(x) = (x-3)(6x^2 - 19x + 15)$. Edelleen polynomin $p_1(x) = 6x^2 - 19x + 15$ mahdollisen rationaalijuuren osoittaja jakaa luvun 15 ja nimittäjä luvun 6. Kokeilemalla saadaan tälle nollakohdaksi $x = \frac{3}{2}$, jolloin siis $p_1(x)$ on jaollinen polynomilla $x - \frac{3}{2}$. Jakolaskulla saadaan $p_1(x) = (x - \frac{3}{2})(6x - 10) = 6(x - \frac{3}{2})(x - \frac{5}{3})$, jolloin alkuperäiselle polynomille $p(x)$ saadaan tekijöihinjako

$$p(x) = 6(x - \frac{3}{2})(x - \frac{5}{3})(x - 3).$$

*Esimerkki 34.* Myös erilaisia ryhmittelyjä on toisinaan mahdollista käyttää tekijöiden löytämiseen:

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \\ = \; & x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x + x - 2 \\ = \; & x^3(x-2) - 2x(x-2) + x - 2 \\ = \; & (x^3 - 2x + 1)(x-2) \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} x^3 - 2x + 1 &= x^3 - x^2 + x^2 - x - x + 1 \\ &= x^2(x-1) + x(x-1) - (x-1) \\ &= (x^2 + x - 1)(x-1), \end{aligned}$$

mutta sopivia ryhmittelyjä on yleensä hankala löytää.

*Esimerkki 35.*

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 \\ &= x^2(x^2 - x + 1) + x(x^2 - x + 1) + x^2 - x + 1 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

*Esimerkki 36.* Joitakin tekijöihinjakoja on myös valmiiksi taulukoituna (esim. MAOL).

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1).$$

polynomeilla $x^2 + x + 1$ ja $x^2 - x + 1$ ei ole reaalisia nollakohtia, joten ne ovat jaottomia $\mathbb{R}[x]$:ssä. Joukossa $\mathbb{C}[x]$ ne sen sijaan jakautuvat tekijöihin: polynomilla $x^2 + x + 1$ on nollakohdat $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, joten

$$x^2 + x + 1 = (x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2})$$

ja samalla tavalla

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}).$$

## 3.2 Yleinen osamurtohajotelma

Osamurtohajotelmia etsittäessä oletetaan ensiksi, että rationaalilausekkeessa $\frac{p(x)}{q(x)}$ nimittäjä on korkeampaa astetta kuin osoittaja, siis $\deg(p) < \deg(q)$. Jos tämä ei toteudu, on ensiksi suoritettava jakolasku:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)},$$

jossa $a(x)$ on osamäärä ja $p_1(x)$ jakojäännös, jonka aste on pienempi kuin jakajan aste. Tämän jälkeen etsitään osamurtohajotelma rationaalilausekkeelle $\frac{p_1(x)}{q(x)}$. Tähän puolestaan sovelletaan kahta strategiaa, jotka esitellään seuraavissa lauseissa.

**Lause 13 (Nimittäjän tekijöillä syt 1).** *Olkoon* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *kahden polynomin osamäärä,* $\deg(p) < \deg(q)$ *ja*

$$q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x),$$

*sellainen nimittäjän hajotelma, että* $\operatorname{syt}(q_1(x), q_2(x)) = 1$. *Silloin on olemassa sellaiset (yksikäsitteiset) polynomit* $p_1(x)$ *ja* $p_2(x)$*, että*

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}, \tag{3.5}$$

*ja* $\deg(p_i) < \deg(q_i)$.

Edellisen lauseen polynomit $p_1(x)$ ja $p_2(x)$ pitää yleensä etsiä määräämättömien kertoimien avulla.

*Esimerkki 37.*

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

ja helposti todetaan, että $\mathrm{syt}(x^2 + x + 1, x^2 - x + 1) = 1$. Tällöin

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{A_1 + B_1 x}{x^2 + x + 1} + \frac{A_2 + B_2 x}{x^2 - x + 1},$$

mistä kertoimet $A_1$, $B_1$, $A_2$ ja $B_2$ saadaan seuraavasti: Aluksi lavennetaan oikean puolen termit samannimisiksi ja lasketaan yhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\\ &= \frac{A_1 + A_2 + (-A_1 + B_1 + A_2 + B_2)x + (A_1 - B_1 + A_2 + B_2)x^2 + (B_1 + B_2)x^3}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}.\end{aligned}$$

Kertoimet $A_1$, $B_1$, $A_2$ ja $B_2$ saadaan siis ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A_1 & & +A_2 & & = 1 \\ -A_1 & +B_1 & +A_2 & +B_2 & = 0 \\ A_1 & -B_1 & +A_2 & +B_2 & = 0 \\ & B_1 & & +B_2 & = 0 \end{cases}.$$

Ryhmän augmentoitu kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Saadaan Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä muotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

joten $A_1 = A_2 = B_1 = \frac{1}{2}$ ja $B_2 = -\frac{1}{2}$ ja tulokseksi saadaan

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}(1 + x)}{x^2 + x + 1} + \frac{\frac{1}{2}(1 - x)}{x^2 - x + 1}.$$

*Esimerkki 38.* Esimerkin 29 mukaan $\mathrm{syt}(x^3 - 1, x^3 + 1) = 1$, joten rationaalifunktio $f(x) = \frac{1}{x^6 - 1}$ voidaan hajottaa osamurtoihin

$$\frac{1}{x^6 - 1} = \frac{p_1(x)}{x^3 - 1} + \frac{p_2(x)}{x^3 + 1},$$

missä polynomien $p_1$ ja $p_2$ asteet ovat korkeintaan 2. Polynomit $p_1$ ja $p_2$ saadaan määräämättömien kertoimien menetelmällä kuten edellisessäkin esimerkissä ja hajotelma on

$$\frac{1}{x^6 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x^3 - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^3 + 1}.$$

On huomattava, että lauseessa (13) ei oleteta nimittäjän tekijöiden $q_1(x), \ldots, q_k(x)$ olevan jaottomia, ainoastaan, että niillä ei ole yhteisiä tekijöitä. Esimerkin 38 tilanne onkin juuri tällainen: $x^3 - 1$ on jaollinen $x - 1$:llä ja $x^3 + 1$ jaollinen $x + 1$:llä. Niinpä esimerkin 38 osamurtohajotelmaa on mahdollista jatkaa edelleen.

Jos nimittäjässä esiintyy jaottoman polynomin potenssi, ei nimittäjää voida jakaa tekijöihin, joiden syt on 1. Tällöin voidaan turvautua seuraavaan lauseeseen.

**Lause 14 (Nimittäjän tekijöillä syt >1).** *Olkoon* $\deg(r) < \deg(q^n)$. *Tällöin on olemassa polynomit* $r_1, \ldots, r_n$, *joille pätee* $\deg(r_i) < \deg(q)$ *ja*

$$\frac{r(x)}{q(x)^n} = \frac{r_1(x)}{q(x)} + \frac{r_2(x)}{q(x)^2} + \ldots + \frac{r_n(x)}{q(x)^n}.$$

*Esimerkki 39.* Etsitään lausekkeelle $\frac{3x^2-8x+7}{(x-1)(x-2)^2}$ osamurtohajotelma. Koska $\text{syt}(x-1, (x-2)^2) = 1$, voidaan aluksi lauseen 13 perusteella löytää muotoa

$$\frac{3x^2 - 8x + 7}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{p_1(x)}{x-1} + \frac{p_2(x)}{(x-2)^2}$$

oleva hajotelma, missä $\deg(p_1) < 1$ ja $\deg(p_2) < 2$. Merkitään siis $p_1(x) = A$ ja $p_2(x) = B + Cx$, ja määrätään luvut $A = 2$, $B = 1$ ja $C = 1$, jolloin

$$\frac{3x^2 - 8x + 7}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1+x}{(x-2)^2}. \tag{3.6}$$

Hajotelmaa (3.6) voidaan vielä lauseen 14 perusteella jatkaa:

$$\frac{1+x}{(x-2)^2} = \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2},$$

mistä saadaan $D = 1$, $E = 3$ ja siis

$$\frac{1+x}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

Hajotelmaa

$$\frac{3x^2 - 8x + 7}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

ei enää voida jatka, mutta tämä olisi voitu löytää suoraankin käyttämällä määräämättömiä kertoimia.

*Esimerkki 40.* Jos nimittäjän ensimmäisen asteen tekijät ovat yksinkertaiset, ei välttämättä tarvitse turvautua määräämättömien kertoimien keinoon. Esimerkiksi hajotelman

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \tag{3.7}$$

kertoimet saadaan seuraavasti: kerrotaan yhtälö (3.7) $x$:llä, jolloin saadaan

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{Cx}{x+1}$$

ja sijoittamalla $x = 0$ nähdään, että $A = -1$. Kertomalla yhtälö (3.7) $x - 1$:llä puolestaan saadaan

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A(x-1)}{x} + B + \frac{C(x-1)}{x+1},$$

ja sijoittamalla $x = 1$ nähdään, että $B = \frac{1}{2}$. Yhtälön (3.7) kertominen $x + 1$:llä taas antaa

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x+1)}{x} + \frac{B(x+1)}{x-1} + C,$$

josta sijoitus $x = -1$ antaa $C = \frac{1}{2}$.

Aina ei kuitenkaan ole tarpeen löytää hajotelmaa, jossa palaudutaan nimittäjän ensimmäisen asteen tekijöihin. Esimerkiksi määräämätöntä integraalia etsittäessä voidaan toisinaan tyytyä nimittäjän toisen asteen tekijöihin, jolloin etuna on lisäksi se, että ei tarvitse käyttää kompleksilukuhajotelmia, vaan voidaan pysyä reaalilukujen joukossa.

*Esimerkki 41.* Polynomille $q(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ voidaan löytää seuraava hajotelma:

$$\begin{aligned} x^6 + x^4 - x^2 - 1 &= x^4(x^2+1) - (x^2+1) = (x^4-1)(x^2+1) \\ &= (x^2-1)(x^2+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)^2. \end{aligned}$$

Tekijä $x^2 + 1$, joka esiintyy kaksi kertaa, ei enää jakaudu tekijöihin reaalilukujen joukossa, koska sillä ei ole reaalista nollakohtaa. Nyt $\mathrm{syt}(x^2-1, x^2+1) = 1$, joten voidaan löytää osamurtohajotelma

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A+Bx}{x^2-1} + \frac{C+Dx+Ex^2+Fx^3}{(x^2+1)^2},$$

josta kertoimet ratkaisemalla saadaan

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{4}\frac{3+x^2}{(x^2+1)^2}. \tag{3.8}$$

Jälkimmäinen termi voidaan edelleen kehittää muotoon

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C+Dx}{(x^2+1)^2},$$

mistä kertoimet ratkaisemalla saadaan

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2},$$

siis saadaan

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{2}{(x^2+1)^2}. \tag{3.9}$$

Vaikka näin saadun hajotelman ensimmäisen termin nimittäjä jakaantuu reaalisiin tekijöihin $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, on (3.9) jo käyttökelpoinen vasemman puolen määräämättömän integraalin löytämiseksi: Oikean puolen termien antiderivaatat on esitetty mm. matematiikan kaavakokoelmassa kohdissa (28) ja (29).

*Huomautus 4.* Kehitelmä

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

voidaan löytää myös käyttämättä määräämättömiä kertoimia. Miten?

**Matlab**-ohjelmistossa polynomit esitetään jonona kertoimia muuttujan suurimmasta potenssista alaspäin. Esimerkiksi polynomit $p(x) = x^3 + 2x - 1$ ja $q(x) = x^2 - 1$ syötetään muodossa

```
>> p=[1,0,2,-1]

>> q=[1,0,-1]
```

Polynomin arvo jossakin pisteessä lasketaan komennolla `polyval`. Esimerkiksi $q(2) = 2^2 - 1 = 3$ lasketaan seuraavasti:

```
>> polyval(q,2)

ans =

     3

>>
```

Polynomien tulo lasketaan komennolla `conv`:

```
>> conv(p,q)

ans =

      1     0    1    -1    -2     1

>>
```

Vastaus tulkitaan polynomiksi $x^5 + x^3 - x^2 - 2x + 1$. Nollakohtien etsiminen puolestaan tapahtuu seuraavasti:

```
>> roots(p)

ans =

  -0.2267 + 1.4677i
  -0.2267 - 1.4677i
   0.4534

>>
```

Matlabissa on symbolisen matematiikan työkalut myös tekijöihinjakoa varten. Tällöin tulee luoda `syms`-komennolla tarvittavat muuttujasymbolit. Esimerkiksi

```
>> syms x
>> factor(x^6-1)

ans =

(x-1)*(x+1)*(x^2+x+1)*(x^2-x+1)

>>
```

Pelkkä polynomien jakolasku taas saadaan aikaan komennolla `deconv`. Jos esimerkiksi on jaettava polynomi $p(x) = x^3 + 2x - 1$ polynomilla $q(x) = x^2 - 1$ toimitaan seuraavasti:

```
>> [a,r]=deconv(p,q)

a =
     1     0

r =

     0     0     3    -1

>>
```

Vastaus tulkitaan siten että osamäärä on $x$ ja jakojäännös $3x - 1$.

Matlabissa on myös työkalu osamurtojen löytämiseksi:

```
>> [r,p,k]=residue(p,q)

r =
```

```
     2
     1

p =

    -1
     1

k=

     1     0

>>
```

tulkitaan siten, että

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + x.$$

Pystyvektori `r` ilmaisee siis osoittajat 2 ja 1, kun puolestaan pystyvektori `p` ilmaisee nimittäjien nollakohdat $-1$ ja 1. Nimittäjät ovat siis $x-(-1) = x+1$ ja $x-1$. $k$ on osamääräpolynomi $1 \cdot x + 0$.

**Luvun oleellisia asioita**:

- Polynomien jaollisuus, Eukleideen algoritmi, syt.
- Lauseen 13 hajotelma.
- Lauseen 14 hajotelma.