# Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

# Lineaariset DY:t

## Epähomogeeninen DY

Epähomogeeninen, vakiokertoiminen DY

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

voidaan ratkaista seuraavasti:

- Etsitään kaikki homogeenisen DY:n ratkaisut $y_1, \ldots, y_n$ yritteellä $y = e^{\lambda t}$.
- Etsitään epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu $y_0$ yritteellä kokeilemalla tai Laplace-muunnosten avulla.
- Kaikki ratkaisut ovat tällöin muotoa $y = c_1 y_1 + \ldots c_n y_n + y_0$.

# Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

- Jos $b(x)$ on astetta $n$ oleva polynomi, yritä astetta $n$ olevaa polynomia.
- Jos $b(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos $b$ on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos $b$ on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

# Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

## Esimerkki

Etsitään DY:n $y' + y = e^{-t}$ kaikki ratkaisut. Aloitetaan homogeenisen yhtälön $y' + y = 0$ ratkaisuista, jotka saadaan sijoittamalla $y = e^{\lambda t}$. Näin ollen $\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$, josta $\lambda = -1$. Homogeenisen yhtälön ratkaisut ovat täten muotoa $y = ce^{-t}$, ja yksittäisratkaisun löytämiseksi valitaan yrite $y = Ae^{-t}$. Koska tämä on homogeenisen yhtälön ratkaisu, muutetaan yrite muotoon $y = Ate^{-t}$. Tällöin

$$y' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

ja sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$Ae^{-t} - Ate^{-t} + Ate^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow A = 1.$$

Näin ollen yleinen ratkaisu on $y = ce^{-t} + te^{-t}$.

# Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

## Esimerki

- $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$
- $y'' + 3y' + 2y = \sin x$
- $y'' + 3y' + 2y = \sinh x$

# Laplace-muunnos

## Laplacen integraali

Funktion $f$ Laplace-muunnos määritellään

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Muotoa

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

olevaa integraalia sanotaan Laplacen integraaliksi.

# Laplace-muunnos

## Määritelmä

Olkoon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä vain äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos integraali

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

suppenee jollain $s$:n arvolla, sanotaan, että $f$ on originaalifunktio ja että sen Laplace-muunnos $F(s)$ on kuvafunktio. Lisäksi merkitään $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

## Ominaisuudet

- Lineaarisuus: $\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.
- Muuttujan skaalaus: $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$.
- Kertominen eksponenttifunktiolla: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$.
- Kuvafunktion derivointi: $F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s)$.
- Originaalifunktion derivointi: $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+)$, missä $f(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$.
- Derivointisäännön yleistys: Jos funktiolla $f^{(n)}$ on Laplace-muunnos, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n\mathcal{L}[f](s) \\ &\quad -s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).\end{aligned}$$

## Ominaisuudet

- Originaalifunktion integrointi: Jos $f$ on originaalifunktio, on myös

$$g(t) = \int_0^t f(u)\,du$$

ja

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(u)\,du](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

### Konvoluutio

Määritellään

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du.$$

### Lause

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * (ah + bg) = af * h + bf * g$, ja
- $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$.

# Laplace-muunnos

**Lause**

Jos $F(s)$ on kuvafunktio, on $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

**Lause**

Jos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, on

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st}\, ds,$$

jos $t > 0$ ja $x$ on suurempi kuin funktion $f$ kasvueksponentti. Ylläoleva integraali tunnetaan nimellä Bromwichin integraali.

**Lause**

Jos $f_1$ ja $f_2$ ovat jatkuvia joukossa $[0, \infty)$ ja $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$, niin $f_1(t) = f_2(t)$, kun $t \in [0, \infty)$.

# Yksittäisratkaisun etsimisestä

## Laplace-muunnoksilla

Jos etsitään ratkaisua, jolle $y(0) = 0$, saadaan

$$
\begin{aligned}
& y' + y = e^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad & sY + Y = \frac{1}{s+1} \\
\Leftrightarrow \quad & Y = \frac{1}{(s+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Tästä saadaan (taulukon rivi 22)

$$y = te^{-t}$$

## Esimerkki

$$
\begin{aligned}
& 2x+1+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+1} \\
= \quad & \frac{(2x+1)(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)}+\frac{(x+1)}{(x+2)(x+1)}-\frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\
= \quad & \frac{2x^3+7x^2+6x-1}{x^2+3x+2}
\end{aligned}
$$

## Hajotelma toisinpäin

$$
\frac{x^4+3x^2-x+1}{x^2+3x+1} = ?
$$

# Osamurtohajotelmat

## "Määritelmä"

Rationaalilausekkeen $\frac{p(x)}{q(x)}$ osamurtohajotelma on esitys

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)},$$

missä $a(x)$ on polynomi, $\deg(p_i) < \deg(q_i)$ ja $\deg(q_i)$ on mahdollisimman pieni.

# Osamurtohajotelmat

## Esimerkki

Jakokulmassa jakamalla saadaan

$$\frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 1} = x^2 - 3x + 11 + \frac{-31x - 10}{x^2 + 3x + 1}.$$

Näin saatu hajotelma ei ole kaikkiin tarkoituksiin paras mahdollinen, sillä osoittaja on vielä astetta 1.

## Osoittajan asteen vähentäminen

Osoittautuu, että osoittajien astetta voidaan vähentää jakamalla nimittäjä tekijöihin. Samalla summattavien määrä kasvaa.

**Lause**

Jos $\deg q \leq \deg(p)$ ja $q \neq 0$, saadaan jakokulmassa

$$p = aq + r,$$

missä $a$ on osamäärä, $r$ jakojäännös ja $\deg(r) < \deg(q)$.

**Määritelmä**

Polynomi $p$ on *jaollinen* polynomilla $q$, tai $q$ *jakaa p:n* tai $q$ *on p:n tekijä*, merkitään $q \mid p$, mikäli $p = aq$ jollekin polynomille $a$.

# Polynomien tekijöihinjako

$$z-1 \overline{\big| \; z^3 \quad -4z^2 \quad +5z \quad -2}$$

$$
\begin{array}{r|llll}
 & z^2 & & & \\ \cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2
\end{array}
$$

# Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|llll}
 & z^2 & & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & 
\end{array}
$$

# Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2
\end{array}
$$

# Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & & \\
\hline
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\hline
 & & -3z^2 & +5z & -2
\end{array}
$$

# Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|llll}
 & z^2 & -3z & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z &
\end{array}
$$

# Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2
\end{array}
$$

# Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & +2 & \\
\hline
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\hline
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\hline
 & & & 2z & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & +2 & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2 \\
 & & & 2z & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & +2 & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2 \\
 & & & 2z & -2 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

# Polynomien jaollisuudesta

## Esimerkki

- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, joten $(x-1) \mid (x^2-1)$ ja $(x+1) \mid (x^2-1)$
- $x^2 - 1 = 2(x+1) \cdot \frac{1}{2}(x-1)$, joten myös $2(x+1) \mid (x^2-1)$ ja $\frac{1}{2}(x+1) \mid (x^2-1)$
- Jos $p \mid q$, ja $c \neq 0$ vakio, on $q = pr = cp \cdot c^{-1}r$. Täten myös $cp \mid q$. Ei toimi, jos $c$ ei ole vakio.
- Sanotaan, että polynomit $p(x)$ ja $cp(x)$ ovat *liitännäiset*, jos $c \neq 0$.

# Suurin yhteinen tekijä

## Määritelmä

Polynomien $p$ ja $q$ suurin yhteinen tekijä $d = \gcd(p, q)$ on polynomi, joka toteuttaa

- $d \mid p$ ja $d \mid q$
- $d$ on jaollisuusrelaation suhteen maksimaalinen ylläolevat ehdot toteuttava.

## Huomautus

Polynomien suurin yhteinen tekijä ei ole yksikäsitteisesti määrätty polynomi, vaan luokka toisilleen liitännäisiä polynomeja: Jos $d(x)$ toteuttaa yllämainitut ehdot, myös $cd(x)$, missä $c \neq 0$ toteuttaa ne.

# Suurin yhteinen tekijä

## Esimerkkejä

- $\gcd((x-2)(x-5),(x-1)(x+3)(x+2)) = 1$
- $\gcd((x-2)(x-5),(x-1)(x+3)(x-2)) = x-2$
- $\gcd((x-2)^4(x-1)(x+2),(x-2)(x-1)^3(x+3)) = (x-2)(x-1)$

## Huomautus

Koska kaikki vakiopolynomit $c \neq 0$ ovat liitännäisiä 1:n kanssa, tarkoittaa $\gcd(p,q) = 1$ sitä, että polynomeilla $p$ ja $q$ on yhteisenä tekijänä vain vakio.

# Polynomien tekijöihinjaosta

## Määritelmä

Polynomi $p$ on jaoton, jos kaikki sen tekijät ovat liitännäisiä joko $p$:n tai vakiopolynomin 1 kanssa.

## Esimerkki

Polynomilla $x^2+1$ voi asteensa puolesta olla vain 0., 1., tai 2. asteen tekijä. 2. asteen tekijä on liitännäinen $x^2+1$ kanssa ja 0. asteen tekijä vakiopolynomin 1 kanssa. 1 asteen tekijää $x-c \in \mathbb{R}[x]$ ei ole, koska polynomilla $x^2+1$ ei ole reaalista nollakohtaa $c$. Näin ollen $x^2+1$ on jaoton joukossa $\mathbb{R}[x]$.

## Esimerkki

$x^2+1=(x+i)(x-i)$, joten $x^2+1$ ei ole jaoton joukossa $\mathbb{C}[x]$.

# Polynomien tekijöihinjaosta

## Seuraus algebran peruslauseesta

Jokainen polynomi jakautuu $\mathbb{C}[x]$:ssä ensimmäisen asteen tekijöihin:

$$P(x) = a(x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)$$

## Huomautus

Hajotelman löytäminen on usein hankalaa $\leftrightarrow$ nollakohtien löytäminen hankalaa. Sen sijaan $\gcd(p, q)$ voidaan aina löytää suoraviivaisesti.

# Polynomien tekijöihinjaosta

## Lause

Olkoon $p \in \mathbb{R}[z]$. Jos $p(z) = 0$, niin myös $p(\overline{z}) = 0$.

## Todistus

Käytetään kompleksikonjugaatin ominaisuuksia $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ja $\overline{z} = z$, jos $z \in \mathbb{R}$.
Jos $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots c_1 z + c_0$, missä $c_i \in \mathbb{R}$, ja $P(z) = 0$, on myös

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{0} = \overline{P(z)} = \overline{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots c_1 z + c_0} \\
&= \overline{c_n}\,\overline{z^n} + \overline{c_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{c_1}\,\overline{z} + \overline{c_0} \\
&= c_n \overline{z}^n + c_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \ldots + c_1 \overline{z} + c_0 \\
&= P(\overline{z})
\end{aligned}
$$

# Polynomien tekijöihinjaosta

**Lause**

$(z - c)(z - \overline{c}) \in \mathbb{R}[z]$

**Todistus**

$$(z - c)(z - \overline{c}) = z^2 - (c + \overline{c})z + c\overline{c},$$

$c + \overline{c} = 2\,\mathrm{Re}(c) \in \mathbb{R}$ sekä $c\overline{c} = |c|^2 \in \mathbb{R}$.

## Lause

Jokainen polynomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ jakautuu joukossa $\mathbb{R}[x]$ tekijöihin, joiden aste on korkeintaan 2.

## Todistus

Kompleksilukujen joukossa $p(x)$:n tiedetään jakautuvan 1. asteen tekijöihin:

$$p(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n).$$

Jos $c_i \notin \mathbb{R}$, esiintyy myös $\overline{c_i}$ nollakohtien joukossa (koska $p(x) \in \mathbb{R}[x]$). Jaotellaan siis nollakohdat $c_1$, ..., $c_n$ jonoon $r_1$, ..., $r_k$, $w_1$, $\overline{w_1}$, ..., $w_l$, $\overline{w_l}$. Tällöin

$$p(x) = a(x - r_1) \ldots (x - r_k) \cdot \underbrace{(x - w_1)(x - \overline{w_1})}_{\in \mathbb{R}[x]} \ldots \underbrace{(x - w_l)(x - \overline{w_l})}_{\in \mathbb{R}[x]}.$$

# Osamurtohajotelmat

**Lause (Tyypin I hajotelma)**

Olkoon $\deg(p) \leq \deg(q)$. Jos $q \neq 0$ voidaan jakaa tekijöihin $q = q_1 q_2$, joille $\gcd(q_1, q_2) = 1$, on olemassa sellaiset yksikäsitteiset polynomit $p_1$ ja $p_2$, että

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$$

ja $\deg(p_i) < \deg(q_i)$.

**Lause (Tyypin II hajotelma)**

Olkoon $\deg(p) \leq \deg(q^n)$ ja $q \neq 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset polynomit $p_1, \ldots, p_n$, joille

$$\frac{p}{q^n} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \ldots + \frac{p_n}{q^n},$$

ja $\deg(p_i) < \deg(q)$.

## Yhteenveto

- Suorita jakolasku $\frac{p}{q} = a + \frac{r}{q}$, jonka jälkeen $\deg(r) < \deg(q)$.
- Jos nimittäjä $q$ voidaan jakaa tekijöihin $q = q_1 q_2$, missä $\gcd(q_1, q_2) = 1$, etsi polynomit $p_i$ ($\deg(p_i) < \deg(q_i)$) joille

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$$

- Jos nimittäjää ei voi jakaa tekijöihin, joiden $\gcd = 1$, mutta on muotoa $q^n$, etsi polynomit $p_1$, $p_2$, …, $p_n$ ($\deg(p_i) < \deg(q)$) joille

$$\frac{p}{q^n} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \ldots + \frac{p_n}{q^n}.$$

# Osamurtohajotelmat

**Polynomien $p_i$ etsiminen**

- Määräämättömät kertoimet $\Rightarrow$ Lineaarinen yhtälöryhmä $\Rightarrow$ Gaussin-Jordanin menetelmä

## Esimerkki

$$y'' + y' - 2 = 0,$$

missä $y(0) = y'(0) = 1$. Laplace-muunnoksilla

$$\begin{aligned}
& s^2 Y - s - 1 + sY - 1 - 2\frac{1}{s} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (s^2 + s)Y = \frac{2}{s} + 2 + s \\
\Leftrightarrow \quad & Y = \frac{2}{s(s^2+s)} + \frac{2}{s^2+s} + \frac{s}{s^2+s} \\
& = \frac{2}{s^2(s+1)} + \frac{2}{s^2+s} + \frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

## Esimerkki

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(s+1)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1}\\ &= \frac{(As+B)(s+1)+Cs^2}{s^2(s+1)} = \frac{(A+C)s^2+(A+B)s+B}{s^2(s+1)}\end{aligned}$$

Näin ollen $A+C=0$, $A+B=0$ ja $B=1$, josta $A=-1$ ja $C=1$. Täten

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$