Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Lineaariset DY:t

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön

$$y' + a(x)y = 0$$

ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H.
- Vakion variointi: Sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen DY:hyn ja ratkaistaan $C(x)$.

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.

Sarjaratkaisut

Sarjaratkaisu

Jos $a(x)$ ja $b(x)$ ovat riittävän säännöllisiä, voidaan DY:n

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ratkaisu löytää Taylorin kehitelmän

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

avulla.

Esimerkki 16

Airyn DY $y'' + xy = 0$ alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Separoituvat DY:t

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Separoituvan DY:n ratkaiseminen

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C \end{aligned}$$

Esimerkit 19–21

Esimerkki 21:

$$
\begin{aligned}
& ma = mg - kv^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = dt \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = \int dt + C
\end{aligned}
$$