# Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

# DY-ryhmät

## Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

## Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta $t$, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä

# DY-ryhmät

## Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta $t$, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä (alkuehtoineen).

## Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Abstrakti muoto: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. DY-ryhmä on *homogeeninen*, jos $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Tulkinta: Piste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ riippuu ajasta $t$, liikkeen määrää ylläoleva DY-ryhmä (alkuehtoineen).

## Lause

Lineaarisen, vakiokertoimisen DY-ryhmän yleinen ratkaisu on muotoa

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_0,$$

missä $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_1$ ovat homogeenisen ryhmän ratkaisut ja $\boldsymbol{y}_0$ jokin ryhmän yksittäisratkaisu.

# DY-ryhmät

**Huomautus**

Monissa sovelluksissa $\boldsymbol{f}(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{f}(t) = B\boldsymbol{u}(t),$$

missä $B$ on $n \times m$-matriisi ja $\boldsymbol{u}(t)$ $m \times 1$-vektori.

## Huomautus

Monissa sovelluksissa $\boldsymbol{f}(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\boldsymbol{f}(t) = B\boldsymbol{u}(t),$$

missä $B$ on $n \times m$-matriisi ja $\boldsymbol{u}(t)$ $m \times 1$-vektori.

## Tällöin

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

# DY-ryhmät

## Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota $x$ joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$x' = Ax$$

# DY-ryhmät

## Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota $x$ joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ $(A \in \mathbb{R})$ strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \end{aligned}$$

## Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota $x$ joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$
\begin{aligned}
& x' = Ax \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A
\end{aligned}
$$

# DY-ryhmät

## Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota $x$ joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{x'}{x} = A \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dt}\ln x = A \\ \Leftrightarrow\quad & \ln x = At + C_0 \end{aligned}$$

## Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota $x$ joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$\begin{aligned} & x' = Ax \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \\ \Leftrightarrow \quad & \ln x = At + C_0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = Ce^{At}, \end{aligned}$$

## Ratkaisuidea (homogeeninen DY)

Etsittäessä reaalifunktiota $x$ joka toteuttaa DY:n $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}$) strategia on tunnettu:

$$
\begin{aligned}
& x' = Ax \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x'}{x} = A \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \ln x = A \\
\Leftrightarrow \quad & \ln x = At + C_0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = Ce^{At},
\end{aligned}
$$

missä $C = e^{C_0}$.

# DY-ryhmät

**Laajennus**

Reaalifunktioille siis DY:n $x' = Ax$ ratkaisu on $x = Ce^{At}$.

**Laajennus**

Reaalifunktioille siis DY:n $x' = Ax$ ratkaisu on $x = Ce^{At}$.

Voidaanko määritellä matriisin eksponenttifunktio $e^{tA}$ siten, että derivaatan ominaisuudet olisivat lähes samat kuin skalaariarvoisille funktioille?

## Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}$ on vakiovektori.

## Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$, missä $\mathbf{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{c} = Ae^{tA}\mathbf{c} = A\mathbf{x},$$

## Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\boldsymbol{c} = Ae^{tA}\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{x},$$

mikä pitää paikkansa jos $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

# DY-ryhmät

## Homogeeninen ryhmä

DY-ryhmän

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

yleinen ratkaisu pitäisi olla muotoa $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}$ on vakiovektori. Tämä "nähdään" seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \frac{d}{dt}e^{tA}\boldsymbol{c} = Ae^{tA}\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{x},$$

mikä pitää paikkansa jos $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Huomautus: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$

**Tärkeä huomio:**

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} \quad =$$

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}$$

### Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

### Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}$$

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}$$

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$\begin{aligned} e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\ &= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$\begin{aligned} e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t} I e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\ &= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\ &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t(A-\lambda I))^k\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

# Lineaariset DY-ryhmät

## Tärkeä huomio:

Homogeenisen ryhmän ratkaisua $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ varten ei tarvitse laskea matriisia $e^{tA}$, vaan $e^{tA}\boldsymbol{c}$ voikin olla helpompi!

## Idea

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ ominaisarvoon $\lambda$ kuuluva yleistetty ominaisvektori, on

$$\begin{aligned}
e^{tA}\boldsymbol{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}Ie^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t(A-\lambda I))^k\boldsymbol{v} \\
&= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

### Huomautus

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ (yleistetty) $\lambda$:aan liittyvä ominaisvektori, on $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ jostain rajasta $m$ alkaen ja

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \boldsymbol{v}$$

### Huomautus

Jos $\boldsymbol{v}$ on matriisin $A$ (yleistetty) $\lambda$:aan liittyvä ominaisvektori, on $(A-\lambda I)^m \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ jostain rajasta $m$ alkaen ja

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\boldsymbol{v}$$

Jos erityisesti $\boldsymbol{v}$ on varsinainen ominaisvektori (siis yleistetty astetta $m=1$),

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}.$$

## Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin $A$ (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$

## Yhteenveto

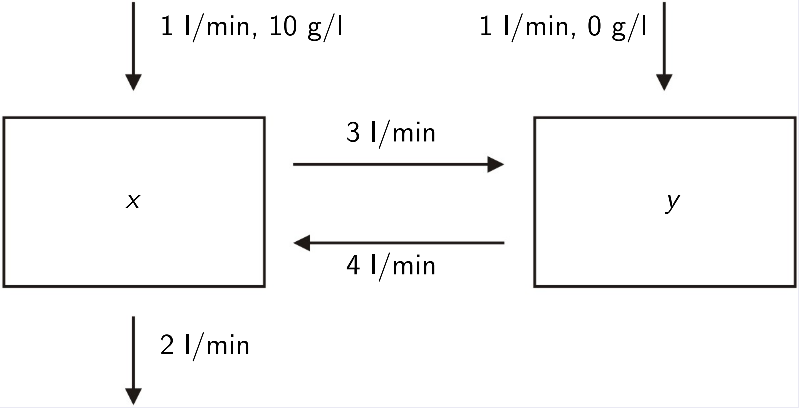
- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin $A$ (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$
- $e^{tA}\boldsymbol{v_i}$ voidaan laskea esityksen $e^{tA}\boldsymbol{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}_i$ perusteella.

## Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ratkaisu on $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$.
- Etsitään matriisin $A$ (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$
- $e^{tA}\boldsymbol{v_i}$ voidaan laskea esityksen $e^{tA}\boldsymbol{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}\boldsymbol{v}_i$ perusteella.
- Kertoimet $c_1, \ldots, c_n$ määräytyvät ehdon $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}(0)$ perusteella.

## Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



**Esimerkki**

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

## Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20} + 4\cdot\frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20} - 4\cdot\frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20} + 4\cdot\frac{y}{20} \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20} - 4\cdot\frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20}+10 \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5\cdot\frac{x}{20}+4\cdot\frac{y}{20} \\ y' &= 3\cdot\frac{x}{20}-4\cdot\frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Esimerkki

Matriisin $A$ ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

**Esimerkki**

Matriisin $A$ ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-\frac{2}{5}, -\frac{1}{20}\}$$

## Matriisin $A$ ominaisvektorit

$$(A+\frac{2}{5}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Matriisin $A$ ominaisvektorit

$$(A+\frac{2}{5}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+\frac{1}{20}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu

Yrite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(vakiovektori), jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

## Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

## Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Alkuehdoista saadaan

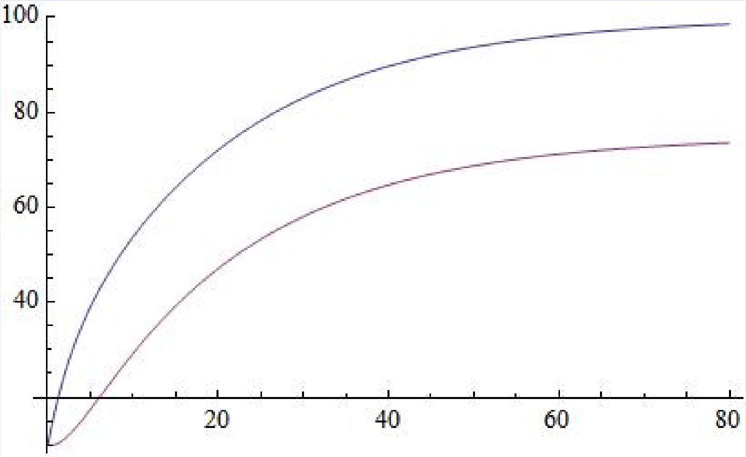
$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

josta $(c_1, c_2) = (\frac{75}{7}, -\frac{530}{7})$.

**Ratkaisu**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{75}{5} e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{530}{7} e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

## Esimerkki



## Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.

## Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}(t)$, jolloin

$$\boldsymbol{x}' = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t).$$

## Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}(t)$, jolloin

$$\boldsymbol{x}' = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t).$$

Sijoittamalla tämä epähomogeeniseen yhtälöön saadaan

$$Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f},$$

## Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c}(t)$, jolloin

$$\boldsymbol{x}' = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t).$$

Sijoittamalla tämä epähomogeeniseen yhtälöön saadaan

$$Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = Ae^{tA}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f},$$

mikä sievenee muotoon

$$e^{tA}\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}'(t) = e^{-tA}\boldsymbol{f}.$$

## Epähomogeeninen DY-ryhmä

- Täten $\mathbf{c}(t) = \int e^{-tA}\mathbf{f}\,dt + \mathbf{c}$ ja

## Epähomogeeninen DY-ryhmä

- Täten $\boldsymbol{c}(t) = \int e^{-tA}\boldsymbol{f}\, dt + \boldsymbol{c}$ ja
- $\boldsymbol{x} = e^{tA}\int e^{-tA}\boldsymbol{f}\, dt + e^{tA}\boldsymbol{c}$.

### Lähtökohta

- Syöte $\boldsymbol{x}(t)$

## Lähtökohta

- Syöte $\boldsymbol{x}(t)$
- Tuloste $\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{x}(t))$

# Lineaariset järjestelmät

## Lähtökohta

- Syöte $\boldsymbol{x}(t)$
- Tuloste $\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{x}(t))$
- Lineaarisuus
  $\mathcal{S}(a_1\boldsymbol{x}_1(t) + a_2\boldsymbol{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_2(t))$.

## Lähtökohta

- Syöte $\boldsymbol{x}(t)$
- Tuloste $\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{x}(t))$
- Lineaarisuus
  $\mathcal{S}(a_1\boldsymbol{x}_1(t) + a_2\boldsymbol{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_2(t))$.

## Mahdollisia malleja

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, missä $A$ on vakiomatriisi.

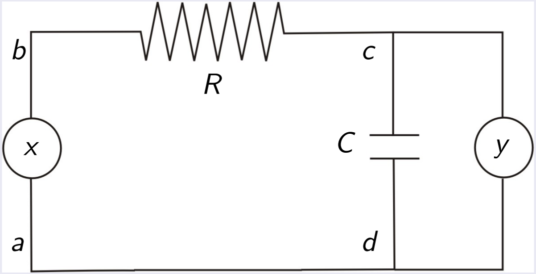
## Lähtökohta

- Syöte $\boldsymbol{x}(t)$
- Tuloste $\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{x}(t))$
- Lineaarisuus
  $\mathcal{S}(a_1\boldsymbol{x}_1(t) + a_2\boldsymbol{x}_2(t)) = a_1\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_1(t)) + a_2\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_2(t))$.

## Mahdollisia malleja

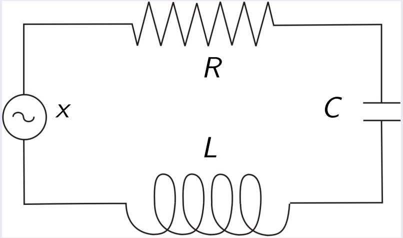
- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, missä $A$ on vakiomatriisi.
- Muuttuvatilainen systeemi, jossa tilavektori $\boldsymbol{s}$ toteuttaa yhtälön $\boldsymbol{s}' = A\boldsymbol{s} + B\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{s} + D\boldsymbol{x}$.

## Esimerkki



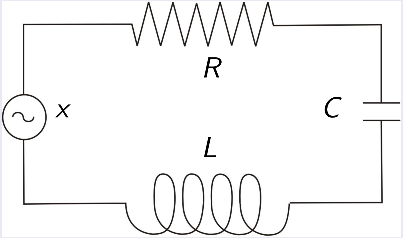

$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$$

## Esimerkki



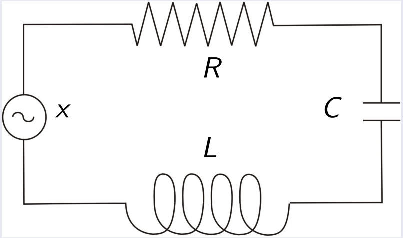

Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$.

## Esimerkki




Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$. Tällöin $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$

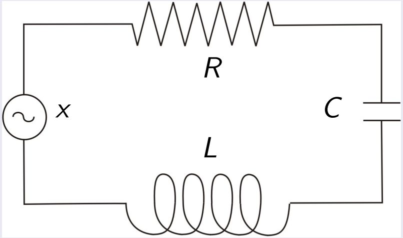
## Esimerkki




Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$. Tällöin $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ ja

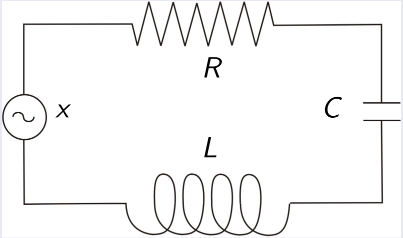
$$x' = RI' + \frac{1}{C}I + L\frac{d^2I}{dt^2} = Ry' + \frac{1}{C}y + Ly''$$

## Esimerkki




Jos taas kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla $y$, on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

## Esimerkki




Jos taas kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla $y$, on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy''$$

### Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla $0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots$.

## Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla $0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots$. Yllä olevasta yhtälöstä saadaan näillä oletuksilla

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \ldots a_0 Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \ldots + b_0 X,$$

## Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla $0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots$. Yllä olevasta yhtälöstä saadaan näillä oletuksilla

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \ldots a_0 Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \ldots + b_0 X,$$

josta

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0)Y = (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0)X$$

## Siirtofunktio

Jos järjestelmää voidaan kuvata vakiokertoimisilla lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä, on siirtofunktio $G(s)$ seuraavaa muotoa:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}}_{G(s)} X(s)$$

# Stabiilisuus

## Määritelmä

Lineaarinen järjestelmä on *stabiili*, jos syötteen $x(t)$ ollessa rajoitettu on tuloste $y(t)$ (output) myös rajoitettu.

## Määritelmä

Lineaarinen järjestelmä on *stabiili*, jos syötteen $x(t)$ ollessa rajoitettu on tuloste $y(t)$ (output) myös rajoitettu. Toisin sanoen: $|x(t)| \leq M_1 \to |y(t)| \leq M_2$.

## Kriteeri

Jos $Y(s) = G(s)X(s)$, $y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$, $g = \mathcal{L}^{-1}[G]$ ja $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X]$, on

$$y(t) = (g * x)(t) = \int_0^t g(u)x(t-u)\,du$$

# Stabiilisuus

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$,

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right|$$

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right| \\
&\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)|\,du
\end{aligned}
$$

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \le M_1$, on

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right| \\
&\le \int_0^t |g(u)x(t-u)|\,du \le \int_0^t |g(u)| M_1\,du
\end{aligned}
$$

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)|\,du \leq \int_0^t |g(u)| M_1\,du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)|\,du \end{aligned}$$

# Stabiilisuus

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\, du \right| \\
&\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)|\, du \leq \int_0^t |g(u)| M_1\, du \\
&= M_1 \int_0^t |g(u)|\, du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)|\, du
\end{aligned}
$$

# Stabiilisuus

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)|\,du \leq \int_0^t |g(u)| M_1\,du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)|\,du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)|\,du \end{aligned}$$

Jos

$$\int_0^\infty |g(u)|\,du < \infty,$$

on myös $y(t)$ rajoitettu.

## Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u)\,du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)|\,du \leq \int_0^t |g(u)|M_1\,du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)|\,du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)|\,du \end{aligned}$$

Jos

$$\int_0^\infty |g(u)|\,du < \infty,$$

on myös $y(t)$ rajoitettu. Voidaan osoittaa, että tämä on myös välttämätön ehto.

## Impulssivaste

Impulssivaste tarkoittaa järjestelmän tulostetta kun syötteenä on Diracin delta-funktio.

# Stabiilisuus

## Impulssivaste

Impulssivaste tarkoittaa järjestelmän tulostetta kun syötteenä on Diracin delta-funktio. Syötteen ollessa $x(t) = \delta(t)$ saadaan $y(t) = (g * \delta)(t) = g(t)$.

## Johtopäätös

Lineaarinen järjestelmä on stabiili tarkalleen silloin sen impulssivasteelle $g(t)$ pätee

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt < \infty$$

## Impulssivaste

Impulssivaste tarkoittaa järjestelmän tulostetta kun syötteenä on Diracin delta-funktio. Syötteen ollessa $x(t) = \delta(t)$ saadaan $y(t) = (g * \delta)(t) = g(t)$.

## Johtopäätös

Lineaarinen järjestelmä on stabiili tarkalleen silloin sen impulssivasteelle $g(t)$ pätee

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt < \infty$$

### Askelvaste

Askelvaste tarkoittaa tulostetta, kun syötteenä on Heavisiden askelfunktio:

$$y(t) = (g * H)(t) = \int_0^t g(u)H(t-u)\,du$$

## Askelvaste

Askelvaste tarkoittaa tulostetta, kun syötteenä on Heavisiden askelfunktio:

$$y(t) = (g * H)(t) = \int_0^t g(u)H(t-u)\,du = \int_0^t g(u)\,du.$$

## Askelvaste

Askelvaste tarkoittaa tulostetta, kun syötteenä on Heavisiden askelfunktio:

$$y(t) = (g * H)(t) = \int_0^t g(u)H(t-u)\,du = \int_0^t g(u)\,du.$$

Näin ollen impulssivaste on askelvasteen derivaatta.

## Siirtofunktion hajotelma

Koska siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

on rationaalifunktio, on sillä olemassa osamurtohajotelma

$$G(s) = a(s) + \frac{p(s)}{q(s)},$$

missä $a$ on polynomi ja $\deg(p) < \deg(q)$.

## Siirtofunktion hajotelma

Koska siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

on rationaalifunktio, on sillä olemassa osamurtohajotelma

$$G(s) = a(s) + \frac{p(s)}{q(s)},$$

missä $a$ on polynomi ja $\deg(p) < \deg(q)$. Käänteismuunnos $g(t)$ saadaan osamurtohajotelmasta.

## Polynomien käänteismuunnos

Koska

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = 1,$$

on $\mathcal{L}[\delta'(t)](s) = s$, $\mathcal{L}[\delta''(t)](s) = s^2$, jne.

## Polynomien käänteismuunnos

Koska

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\,dt = 1,$$

on $\mathcal{L}[\delta'(t)](s) = s$, $\mathcal{L}[\delta''(t)](s) = s^2$, jne.
Näin ollen polynomien käänteiset Laplace-muunnokset sisältävät delta-piikin derivaattoja eivätkä näiden integraalit ole rajoitettuja.

## Käänteismuunnos

Jos $\deg(p) < \deg(q)$, on

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{c,\lambda,k} \frac{c}{(s-\lambda)^k},$$

missä $c$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

## Käänteismuunnos

Jos $\deg(p) < \deg(q)$, on

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{c,\lambda,k} \frac{c}{(s-\lambda)^k},$$

missä $c$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-\lambda)^k}] = \frac{t^{k-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}$$

## Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$,

**Huomautus**

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$, mutta lähestyy nopeasti kohti nollaa, jos $\alpha < 0$.

## Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$, mutta lähestyy nopeasti kohti nollaa, jos $\alpha < 0$. Tämän vuoksi integraali

$$\int_0^\infty t^{k-1} e^{\lambda}\, dt$$

suppenee tarkalleen silloin kun $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

### Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

# Stabiilisuus

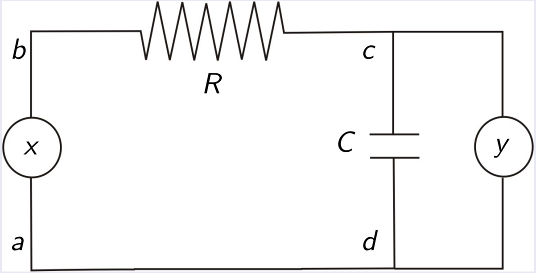
## Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

## Johtopäätös

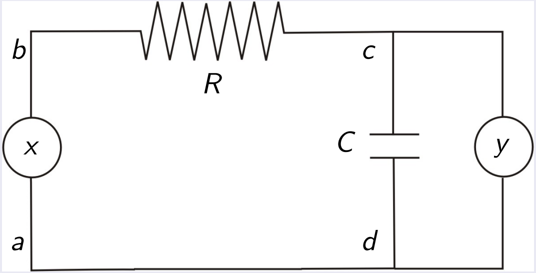
Lineaarinen systeemi on stabiili tarkalleen silloin kun sen siirtofunktion napojen reaaliosat ovat negatiivisia.

## Esimerkki




$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y,$$

## Esimerkki




$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y,$$

Josta $X(s) = RCsY(s) + Y(s) = (RCs + 1)Y(s)$ ja

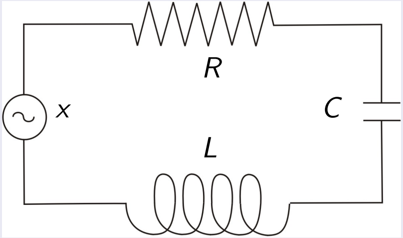
$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{RCs + 1}}_{G(s)} X(s).$$

# Stabiilisuus

**Esimerkki**

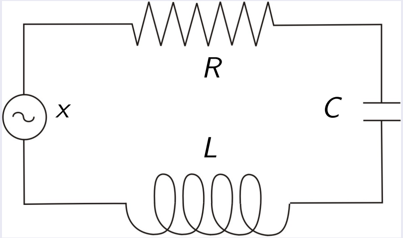
Siirtofunktion ainoa napa on $s = -\frac{1}{RC} < 0$, joten systeemi on stabiili.

## Esimerkki




Jos kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla $y$, on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

## Esimerkki




Jos kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla $y$, on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C\frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy'',$$

## Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2 Y,$$

## Esimerkki

Tästä
$$X = RCsY + Y + LCs^2 Y,$$
mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$.

## Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$.
Siirtofunktion navat ovat

$$\frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

## Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2+RCs+1}$. Siirtofunktion navat ovat

$$\frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Reaalisten parametriarvojen vuoksi $(RC)^2 - 4LC < (RC)^2$, joten tässäkin tapauksessa siirtofunktion nimittäjän nollakohtien reaaliosat ovat negatiiviset.

# Diracin $\delta$-funktio

## "Määritelmä"

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0 \\ \infty, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

# Diracin $\delta$-funktio

## "Määritelmä"

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0 \\ \infty, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

## Määritelmä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\, dx = f(x_0).$$

# Diracin $\delta$-funktio

## "Määritelmä"

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0 \\ \infty, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

## Määritelmä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\, dx = f(x_0).$$

## Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}[\delta(t - x_0)](s)$$

## Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja $T$ näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

## Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja $T$ näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}[x_D(t)](s) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s)$$

## Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja $T$ näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n},\end{aligned}$$

## Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja $T$ näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n},\end{aligned}$$

missä on merkitty $z = e^{sT}$.

### Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $Z$-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

# Diskreetit lineaariset järjestelmät

## Määritelmä

Jonon $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... $Z$-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ $Z$-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ $Z$-muunnos kun $T$ on kiinnitetty.

## Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $Z$-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ $Z$-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ $Z$-muunnos kun $T$ on kiinnitetty.

## Esimerkki

jonolle $a^n$ on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

## Määritelmä

Jonon $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... $Z$-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ $Z$-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ $Z$-muunnos kun $T$ on kiinnitetty.

## Esimerkki

jonolle $a^n$ on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n$$

# Diskreetit lineaariset järjestelmät

## Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $Z$-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ $Z$-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ $Z$-muunnos kun $T$ on kiinnitetty.

## Esimerkki

jonolle $a^n$ on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

## Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $Z$-muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ $Z$-muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ $(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$ $Z$-muunnos kun $T$ on kiinnitetty.

## Esimerkki

jonolle $a^n$ on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a},$$

kun $|a| < |z|$.