

# Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

## Demonstraatio 1, 20.2.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Olkoot  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$  ja  $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ,  $R : A \rightarrow B$  ja  $S : B \rightarrow C$  seuraavasti määritetyjä relaatioita

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, d)\}, \quad S = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (c, \delta)\}.$$

Piirrä relaation  $R$   $AB$ -tasoesitys (esim. pikselikuviona) ja nuolikaaviot tehtävän molemmista relaatioista ja selvitä mitkä ovat relaatioiden  $R$  ja  $S$  määrittely- ja arvojoukot.

2. Muodosta edellisen tehtävän perusteella relaatiot  $S \circ R$ ,  $R^{-1}$ ,  $S^{-1}$  ja  $(S \circ R)^{-1}$ . Onko jokin edellisissä tehtävissä esiintyvä relaatio funktio?
3. Määritellään joukossa  $\{a, b, c, d\}$  binäärinen relaatio

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (c, d), (a, d)\}.$$

Piirrä relaation  $R$  nuolikaavioesitys. Onko  $R$  ekvivalenssirelaatio? Entä osittainen järjestys?

4. Määritellään relaatio  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ehdolla

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow |x - y| < 1.$$

Onko  $T$  refleksiivinen? Entä symmetrinen? Entä antisymmetrinen? Entä transitiivinen?

5. Osoita, että lukuteoreettinen kongruenssin ekvivalenssiluokkien yhteen- ja kertolasku  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$  ja  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$  ovat riippumattomia edustajan valinnasta. Ohje: On osoitettava, että jos  $a$  ja  $a_1$  ovat saman luokan edustajia (siis  $a \equiv_n a_1$ ) ja myös  $b$  ja  $b_1$  saman luokan edustajia, niin myös  $a + b$  ja  $a_1 + b_1$  ovat saman luokan edustajia. Kertolaskua varten on osoitettava, että  $ab$  ja  $a_1b_1$  ovat saman luokan edustajia.
6. Merkintä  $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  tarkoittaa joukon  $\mathbb{Z}$  ekvivalenssiluokkien joukkoa lukuteoreettisen kongruenssin  $\equiv_5$  suhteen. Laadi joukolle  $\mathbb{Z}_5$  kertotaulu luento-oesimerkin mukaisesti. Voit jättää luokat  $\bar{0}$  ja  $\bar{1}$  pois kertotaulusta.
7. Olkoon  $R = \{(x, y) \mid y = x^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Etsi jokin esitysmuoto relaatiolle  $R^{-1}$  ja hahmottele (taso)kuvaajat sekä  $R$ :lle että  $R^{-1}$ :lle ja etsi relaatioiden  $R$  ja  $R^{-1}$  määrittely- ja arvojoukot.
8. Onko edellisen tehtävän relaatio funktio? Entä onko se surjektio? Entä injektio?
9. Etsi sellaiset joukot  $A \subset \mathbb{R}$  ja  $B \subset \mathbb{R}$ , että relaatio  $R = \{(x, y) \mid y = x^2\} \subset A \times B$  on bijektiivinen funktio. Ohje: Vrt. luento-oesimerkki funktiosta  $\sin$  ja  $\sin^{-1}$ .