Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 1, 20.2.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Olkoot $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ ja $C = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $R : A \to B$ ja $S : B \to C$ seuraavasti määriteltyjä relaatioita

   $$R = \{(1,a),(2,a),(3,c),(4,d)\}, \quad S = \{(a,\alpha),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\delta)\}.$$

   Piirrä relaation R AB-tasoesitys (esim. pikselikuviona) ja nuolikaaviot tehtävän molemmista relaatioista ja selvitä mitkä ovat relaatioiden R ja S määrittely- ja arvojoukot.

   Mallivastaus: Relaation R määrittelyjoukko on $\{1,2,3,4\}$ ja arvojoukko $\{a,c,d\}$. Relaation S määrittelyjoukko on $\{a,b,c\}$ ja arvojoukko $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

2. Muodosta edellisen tehtävän perusteella relaatiot $S \circ R$, R^{-1}, S^{-1} ja $(S \circ R)^{-1}$. Onko jokin edellisissä tehtävissä esiintyvä relaatio funktio?

   Mallivastaus: $S \circ R = \{(1,\alpha),(2,\alpha),(3,\delta),\}$, $R^{-1} = \{(a,1),(a,2),(c,3),(d,4)\}$, $S^{-1} = \{(\alpha,a),(\alpha,b),(\beta,b),(\gamma,b),(\gamma,c)\}$, $(S \circ R)^{-1} = \{(\alpha,1),(\alpha,2),(\gamma,3)\}$.

   Relaatio R on funktio.

3. Määritellään joukossa $\{a,b,c,d\}$ binäärinen relaatio

   $$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(c,d),(a,d)\}.$$

   Piirrä relaation R nuolikaavioesitys. Onko R ekvivalenssirelaatio? Entä osittainen järjestys?

   Mallivastaus: R ei ole ekvivalenssi, koska symmetria rikkoutuu: $a \to c$, mutta ei ole $c \to a$ Relaatio R on kuitenkin osittainen järjestys (piirrä nuolikaavio jossa a on minimaalinen alkio).

4. Määritellään relaatio $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla

   $$(x,y) \in T \Leftrightarrow |x-y| < 1.$$

   Onko T refleksiivinen? Entä symmetrinen? Entä antisymmetrinen? Entä transitiivinen?

   Mallivastaus: Relaatio T on refleksiivinen, koska $(x,x) \in T \Leftrightarrow |x-x| < 1$, mikä on aina tosi. Relaatio on myös symmetrinen: $(x,y) \in T \Leftrightarrow |x-y| < 1 \Leftrightarrow |y-x| < 1 \Leftrightarrow (y,x) \in T$. T ei ole antisymmetrinen, sillä esim $(0,\frac{1}{2}) \in T$ ja $(\frac{1}{2},0) \in T$, vaikka $\frac{1}{2} \neq 0$. Relaatio ei myöskään ole transitiivinen, sillä esim. $(0,\frac{1}{2}) \in T$ ja $(\frac{1}{2},1) \in T$, mutta $(0,1) \notin T$

5. Osoita, että lukuteoreettinen kongruenssin ekvivalenssiluokkien yhteen- ja kertolasku $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ ovat riippumattomia edustajan valinnasta. Ohje: On osoitettava, että jos a ja a_1 ovat saman luokan edustajia (siis $a \equiv_n a_1$) ja myös b ja b_1 saman luokan edustajia, niin myös $a+b$ ja a_1+b_1 ovat saman luokan edustajia. Kertolaskua varten on osoitettava, että ab ja a_1b_1 ovat saman luokan edustajia.

   Mallivastaus: Jos a ja a_1 ovat saman luokan edustajia, on $a_1 = a + k_1 n$ ja samoin $b_1 = b + k_2 n$. Näin ollen $a_1 + b_2 = a + k_1 n + a_2 + k_2 n = a_1 + a_2 + n(k_1 + k_2)$. Täten $a_1 + a_2 \equiv_n a + b$

   Samoin $a_1 b_1 = (a + k_1 n)(b + k_2 n) = ab + (k_1 + k_2)n + k_1 k_2 n^2$, joten $a_1 b_1 \equiv_n ab$.

6. Merkintä $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ tarkoittaa joukon $\mathbb{Z}$ ekvivalenssiluokkien joukkoa lukuteoreettisen kongruenssin $\equiv_5$ suhteen. Laadi joukolle $\mathbb{Z}_5$ kertotaulu luentoesimerkin mukaisesti. Voit jättää luokat $\overline{0}$ ja $\overline{1}$ pois kertotaulusta.

   Mallivastaus:

$\cdot$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

7. Olkoon $R = \{(x,y) \mid y = x^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Etsi jokin esitysmuoto relaatiolle R^{-1} ja hahmottele (taso)kuvaajat sekä R:lle että R^{-1}:lle ja etsi relaatioiden R ja R^{-1} määrittely- ja arvojoukot.

   Mallivastaukset: Hahmotelmat ovat sekä ylöspäin että oikealle auakeava paraableli. Relaation R määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja arvojoukko $[0, \infty])$. Relaation R^{-1} määrittelyjoukko on $[0, \infty]$ ja arvojoukko $\mathbb{R}$.

8. Onko edellisen tehtävän relaatio funktio? Entä onko se surjektio? Entä injektio?

   Edellisen tehtävän relaatio R on funktio, mutta R^{-1} ei ole. Relaatio R ei ole surjektio, koska sen arvojoukoon kuuluvat vain positiiviset reaaliluvut. Relaation R ei ole myöskään injektio, koska esim. lukujen -1 ja 1 kuvat ovat samat.

9. Etsi sellaiset joukot $A \subset R$ ja $B \subset R$, että relaatio $R = \{(x,y) \mid y = x^2\} \subset A \times B$ on bijektiivinen funktio. Ohje: Vrt. luentoesimerkki funktiosta sin ja $\sin^{-1}$.

   Mallivastaus: Voidaan valita $A = B = [0, \infty)$.