

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 2, 27.2.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi.

1. Olkoon S kommutatiivinen, supistuva monoidi. Osoita, että joukossa $S \times S$ määritelty relaatio $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ on ekvivalenssirelaatio.
2. Käytetään edellisen tehtävän ekvivalenssiluokista merkintää $[(a, b)]$, ja määritellään algebrallinen rakenne G , jossa alkioina ovat ekvivalenssiluokat $[(a, b)]$ ja operaationa $[(a, b)] * [(c, d)] = [(ac, bd)]$. Onko funktio $f : S \rightarrow G$, $f(a) = [(a, 1)]$ injektio?
3. Selvitä mikä ekvivalenssiluokka on edellisessä tehtävässä neutraalialkio operaation $*$ suhteen. Onko jokaisella ekvivalenssiluokalla käänteisalkio operaation $*$ suhteen? Miten tämä ja edelliset tehtävät liittyvät puoliryhmän $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, 0)$ laajentamiseksi ryhmäksi $(\mathbb{Z}, +, 0)$ tai puoliryhmän $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ laajentamiseksi ryhmäksi $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$?
4. Käytetään merkintää \mathbb{Z}_2 lukuteoreettisen kongruenssin \equiv_2 ekvivalenssiluokista. Mieti aluksi montako näitä on. Laadi joukon \mathbb{Z}_2 yhteen- ja kertolaskutaulu ja etsi jokin toisen asteen polynomi, jonka kertoimet ovat joukossa \mathbb{Z}_2 , jolla ei ole nollakohtia. Ohje: Polynomien kertoimet voivat olla vain $\bar{0}$ tai $\bar{1}$ (voidaan merkitä myös lyhyemmin 0 ja 1). Myös polynomien muuttuja voi saada vain nämä kaksi eri arvoa.
5. Käytetään merkintää \mathbb{Z}_5 lukuteoreettisen kongruenssin \equiv_5 ekvivalenssiluokista. Laadi tämän joukon kertotaulu.
6. Liitetään reaalilukujen joukkoon alkio $-\infty$ ja sovitaan, että $-\infty < x$ ja että $-\infty + x = -\infty$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Määritellään uudeksi yhteenlaskuksi $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ja uudeksi kertolaskuksi $x \otimes y = x + y$. Tuleeko joukosta $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ uuden laskutoimituksen suhteen \otimes suhteen Abelin ryhmä? Entä uuden laskutoimituksen \oplus suhteen monoidi? Toteutuuko $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$ aina?
7. Merkintä $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ tarkoittaa kaikkien kokonaislukualkioisten 2×2 -matriisien joukkoa. Onko tämä joukko supistuva monoidi jos operaationa on matriisiyhteenlasku? Entä jos operaationa on matriisikertolasku? Voit olettaa tunnetuiksi tavalliset matriisien laskusäännöt esim. $(A + B) + C = A + (B + C)$ ja $A(BC) = (AB)C$. Mikäli vastaus on kielteinen, esitä vastaesimerkki.
8. Laadi symmetriselle ryhmälle S_3 kertotaulu. Ohje: merkitse ryhmän alkioita syklimerkinnöillä (1) , (12) , (13) , (23) , (123) , (132) .
9. Mitkä edellisen tehtävän ryhmän alkiot riittävät generoimaan koko ryhmän? Löytyykö ryhmästä S_3 jokin epätriviaali (muu kuin S_3 ja $\{(1)\}$) aliryhmä, siis ryhmäoperaation suhteen suljettu joukko?