Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Älä käytä demotehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

Demonstraatio 3, 6.3.2025

1. Onko joukko $H = \{(1), (12)\}$ permutaatioryhmän S_3 aliryhmä? Jos on, onko se normaali aliryhmä? Ohje: Tarkista ensin onko H suljettu ryhmäoperaatioiden suhteen. Selvitä sen jälkeen, onko $gH = Hg$ aina, kun $g \in S_3$.

2. Osoita, että permutaatioryhmän S_3 aliryhmä $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ on normaali. Ohje: Käytä Demo 2/teht. 8 kertolaskutaulua.

3. Millainen on tekijäryhmä S_3/A_3? Ohje: Tekijäryhmän alkiot ovat sivuluokkia gA_3, missä $s \in S_3$. Näiden kertolasku määritellään $g_1A_3 \cdot g_2A_3 = g_1g_2A_3$. Jos $g \in A_3$, on $gA_3 = A_3$. Laske ainakin joitain tuloja $g_1A_3 \cdot g_2A_3$. Voit käyttää edellisen demokerran kertolaskutaulua.

4. Totea, että $\overline{3} \in \mathbb{F}_7$ generoi kunnan $\mathbb{F}_7$ multiplikatiivisen ryhmän. Ohje: Totea, että kaikki kunnan $\mathbb{F}_7$ nollasta eroavat alkiot saadaan luokan $\overline{3}$ potensseina $\overline{3}^0$, $\overline{3}^1$, $\overline{3}^2$, jne.

5. Olkoon γ syklisen ryhmän C generaattori. Kuinka monta ryhmäoperaatiota (ryhmän kertolaskua) riittää γ^{2000} laskemiseksi? Ohje: Käytä luennolla esiteltyä peräkkäisten neliöimisten menetelmää.

6. Muodosta osa 8 alkion kunnan kertotaulusta. Ohje: Alkukuntana on $\mathbb{F}_2$, ja tälle on löydettävä 3. asteen laajennus. Koska $x^3 + x + 1$ on jaoton yli kunnan $\mathbb{F}_2$ (miksi?), voidaan kahdeksan alkion kunta muodostaa tekijäkonstruktiolla $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$. Ihanteen $I = \langle x^3 + x + 1\rangle$ sivuluokkien edustajiksi voidaan valita $p(x) + I$, missä $p(x)$ on korkeintaan toisen asteen polynomi yli kunnan $\mathbb{F}_2[x]$. Mitä tällöin ovat $(1 + x + I)(1 + x^2 + I)$, $(x + I)(1 + x + x^2 + I)$ ja $(1 + x + I)(1 + x + I)$? Ohje: $p(x) + I = I$ aina jos $p(x) \in I$.

7. Olkoon $q \neq 1$. Todista matemaattisella induktiolla, että
$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
aina kun $n \in \mathbb{N}$.

8. Todista matemaattisella induktiolla, että
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$$
aina kun $n \in \mathbb{N}$.

9. Tarkastele seuraavaa todistusta ja selitä missä on virhe.

   Todistetaan matemaattisella induktiolla, että jos korissa on $n \in \mathbb{N}$ biljardipalloa, niin ne ovat kaikki samanvärisiä.

   Induktion lähtökohta: $n = 1$. Tällöin korissa on vain yksi pallo ja väite pitää selvästi paikkansa.

   Induktioaskel: Oletetaan, että väite pitää paikkansa jollekin luvulle n (induktio-oletus) ja tarkastellaan koria, jossa on $n + 1$ biljardipalloa. Poistetaan korista yksi pallo, jolloin jäljelle jääneet n palloa ovat samanvärisiä induktio-oletuksen mukaan.

Tämän jälkeen otetaan korista jokin toinen pallo pois ja palautetaan ensin poistettu, jolloin korissa on jälleen n palloa, jotka ovat kaikki samanvärisiä induktio-oletuksen mukaan. Näin ollen siis ensiksi poistettu pallo on samanvärinen koriin jääneiden pallojen kanssa, joten kaikki $n+1$ palloa ovat samanvärisiä.

Näin on siis näytetty toteen, että väittämän totuusarvo siirtyy luvulta n luvulle $n+1$.