Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Ekvivalenssi

Joukon A binäärinen relaatio R on *ekvivalenssirelaatio*, mikäli R toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $(\forall a)\ aRa$ (refleksiivisyys),
2. $(\forall a)(\forall b)\ aRb \Rightarrow bRa$ (symmetria) ja
3. $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$ (transitiivisuus).

Lause

Joukon A ekvivalenssirelaatio jakaa A:n osajoukkoihin

$$A = \bigcup_{i \in I} [a_i]$$

joille $[a] = \{x \mid xRa\}$ ja $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$ aina kun $\neg(a_i R a_j)$.

Osittainen järjestys

Joukon A binäärinen relaatio R on *osittainen järjestys*, mikäli R toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $(\forall a)\ aRa$ (refleksiivisyys),
2. $(\forall a)(\forall b)\ aRb,\ bRa \Rightarrow a = b$ (antisymmetria) ja
3. $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$ (transitiivisuus).

Esimerkkejä

Jaollisuus

A on joko $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{Z}$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in A)(b = a \cdot c)$$

Jaollisuusrelaatio $\mid$ on osittainen järjestys joukossa $\mathbb{N}$ mutta ei joukossa $\mathbb{Z}$.

Lukuteoreettinen kongruenssi

Valitaan $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ja määritellään

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow n \mid (b - a)$$

$\equiv_n$ on joukon $\mathbb{Z}$ ekvivalenssirelaatio.

Lukuteoreettinen kongruenssi

Ekvivalenssiluokat

Ehto $n \mid (b-a)$ tarkoittaa, että $b - a = n \cdot k$, joten

$$\begin{aligned}[a] &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv_n a\} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ldots a-2n, a-n, a, a+n, a+2n, \ldots\}.\end{aligned}$$

Toinen merkintä

Erityisesti lukuteoreettisen kongruenssin yhteydessä käytetään merkintää

$$[a] = \overline{a}.$$

Esimerkki

Kun $n = 6$, on

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots\}, \\
\overline{1} &= \{\ldots, -11, -5, 1, 7, 13, \ldots\}, \\
\overline{2} &= \{\ldots, -10, -4, 2, 8, 14, \ldots\}, \\
\overline{3} &= \{\ldots, -9, -3, 3, 9, 15, \ldots\}, \\
\overline{4} &= \{\ldots, -8, -2, 4, 10, 16, \ldots\}, \\
\overline{5} &= \{\ldots, -7, -1, 5, 11, 17, \ldots\}, \\
\overline{6} &= \{\ldots, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots\} = \overline{0}
\end{aligned}$$

Huomautus

$\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{5}$ ja $\overline{i} \cap \overline{j} = \emptyset$, jos $i \not\equiv_6 j$.

Ekvivalenssiluokkien yhteen- ja kertolasku

- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$
- $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$

Riippumattomuus edustajasta

Esimerkiksi $\overline{3} = \overline{9}$ ja $\overline{5} = \overline{-7}$.

- $\overline{3} + \overline{5} = \overline{3 + 5} = \overline{8} = \overline{2}$ ja
- $\overline{9} + \overline{-7} = \overline{9 + (-7)} = \overline{2}$. Samoin
- $\overline{3} \cdot \overline{5} = \overline{15} = \overline{3}$ ja
- $\overline{9} \cdot \overline{-7} = \overline{-63} = \overline{3}$

Lukuteoreettinen kongruenssi

Äärellinen algebrallinen systeemi

- Alkiot $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{5}\}$
- Yhteen- ja kertolasku
- Säännöt $a+b=b+c$, $ab=ba$, $a(b+c)=ab+ac$, jne. periytyvät suoraan kokonaislukujen ominaisuuksista
- Algoritminen käsittely periytyy kokonaislukujen ominaisuuksista.

Funktiot

Määritelmä

Relaatio $f : A \to B$ on funktio, jos jokaista joukon A alkiota a kohti on tarkalleen yksi joukon B alkio b siten että $(a, b) \in f$.

Huomautus

Jokainen pystysuora leikkaa funktion kuvaajan tasan kerran.

Määritelmä

Edellisen määritelmän tapauksessa merkitään $f(a) = b$ ja relaatioiden yleistä terminologiaa käyttäen sanotaan, että b on a:n *kuva*, a on b:n *alkukuva*, ja että a *kuvautuu* b:ksi.

Funktiot

Lause

Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat funktiota, on relaatiotulo $g \circ f$ myös funktio

Määritelmä

Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ funktioita. *Yhdistetty funktio* $g \circ f$ on relaatiotulo $g \circ f : A \to C$, jolle siis relaatiotulon määritelmän mukaan pätee $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Tällöin funktiota f kutsutaan *sisäfunktioksi* ja g:tä *ulkofunktioksi*

Esimerkki

Jos $h(x) = e^{-x^2}$, voidaan h kirjoittaa muodossa $h = g \circ f$, missä $g(x) = e^x$ on ulkofunktio ja $f(x) = -x^2$ on sisäfunktio.

Funktiot

Määritelmä

Funktio $f : A \to B$ on *injektio*, jos $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. $f : A \to B$ on *surjektio*, jos $f(A) = B$. $f : A \to B$ on *bijektio*, jos f on sekä injektio että surjektio.

Funktiot

Huomautus

- Jokainen vaakasuora leikkaa injektion kuvaajan korkeintaan kerran.
- Jokainen vaakasuora leikkaa surjektion kuvaajan ainakin kerran.
- Jokainen vaakasuora leikkaa bijektion kuvaajan tasan kerran.

Funktiot

Lause

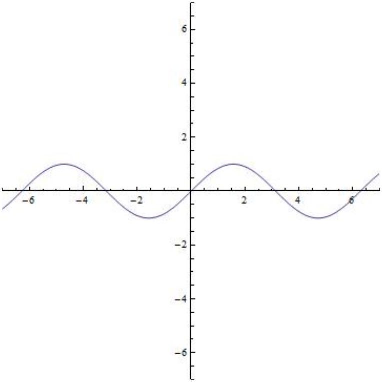
Jos $f : A \to B$ on bijektiivinen funktio, on käänteisrelaatio $f^{-1} : B \to A$ myös funktio, ns. f:n *käänteisfunktio*. Kääntäen, jos funktion $f : A \to B$ käänteisrelaatio $f^{-1} : B \to A$ on funktio, on f bijektio.

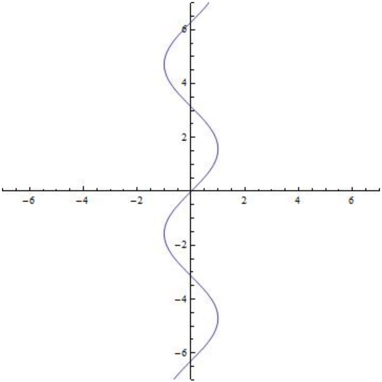
Huomautus

Funktion $f : A \to B$ käänteisrelaatio on funktio *vain* jos f on bijektio.

Funktiot

$$\sin = \{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \qquad \sin^{-1} = \{(\sin x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$





Funktiot

$$\sin = \{(x, \sin x) \mid x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\}, \sin^{-1} = \{(\sin x, x) \mid x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\}$$