

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 2, 24.4.2025

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi

1. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x)$ ei ole olemassa (äärellisenä) millekään luvulle $x \in \mathbb{R}$.

2. Olkoon $\alpha > 0$. Laske $\mathcal{F}[e^{-\alpha|x|}](y)$ suoraan Fourier-muunnoksen määritelmään perustuen. Vastaus: $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 y^2}$, mutta esitä yksityiskohdat ja perustelut.

3. Määritä

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y).$$

Ohje: Etsi edelliseen tehtävän, lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen avulla sellainen funktio $f(x)$, jolle $\mathcal{F}[f(x)](y) = \frac{1}{1+y^2}$. Käytä lopuksi duaaliperiaattia.

4. Määritellään Hermiten sisätulo seuraavasti:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Laske sisätulo $(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x})$ ja esitä se δ -funktion avulla. Ohje: Voit hyödyntää luennolla esiintyneitä δ -funktion esitystapoja.

5. Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$ tunnetaan, mikä on $\mathcal{F}[xf(x)](y)$? Ohje: Vastaus löytyy esim. derivoimalla $F(y)$:n integraaliesitys. Toinen vaihtoehto on käyttää derivointiperiaattia sekä duaaliperiaattia. Vastaus: $\mathcal{F}[xf(x)](y) = \frac{F'(y)}{-2\pi i}$, mutta esitä perustelut.

6. Määritä $\mathcal{F}[x](y)$. Ohje: Käytä tietoa $\mathcal{F}[1](y) = \delta(y)$, Fourier-muunnosten ominaisuuksia, sekä aiempien tehtävien tuloksia.

7. Oletetaan, että $f(x)$ toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$. Osoita että myös $f(x)$:n Fourier-muunnos $F(y)$ toteuttaa samanlaisen yhtälön. Ohje: Käytä derivointiperiaattia ja aiemman tehtävän tulosta.

8. Osoita, että funktio $f(x) = e^{-\pi x^2}$ toteuttaa yhtälön $f'(x) = -2\pi x f(x)$. Oletetaan, että myös funktio $g(x)$ toteuttaa yhtälön $g'(x) = -2\pi x g(x)$. Laske

$$\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{e^{-\pi x^2}}.$$

Mitä voit päätellä tuloksesta?

9. Olkoon H Heavisiden funktio (kts. luentomoniste). Varmista että kaava

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

pitää paikkansa. Laske tämän jälkeen kaavan kummankin puolen Fourier-muunnokset käyttämällä oikealla puolella lineaarisuutta ja aikasiirtoa. Merkitse funktion H Fourier-muunnosta $\hat{H}$:lla. Minkä lausekkeen saat näin $\hat{\hat{H}}$:lle?