

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 3, 1.5.2025

Huom: Demot palautetaan tavalliseen tapaan, mutta vapunpäivän vuoksi demotilaisuutta ei järjestetä. Matikkapaja 28.4. järjestetään, ja mallivastaukset julkaistaan kurssin verkkosivulla.

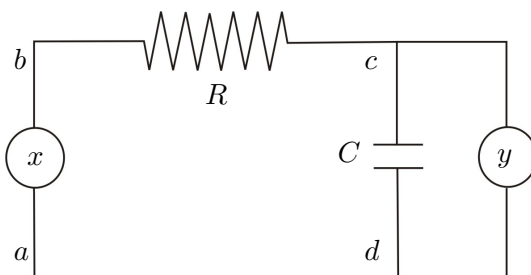
1. Piirrä kuvaaja kolmiopulssille

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{jos } x \in [-1, 0] \\ -x + 1, & \text{jos } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{jos } x \geq 1 \end{cases},$$

selvitä millaisen funktion f integraalifunktio Λ on, ja laske integrointiperiaatetta (vuoden 2019 Moniste C, esimerkki 52) käyttämällä $\mathcal{F}[\Lambda(x)](y)$. Ohje 1: Mieti ensin millainen olisi derivaattafunktio Λ :lle. Ohje 2: Funktion f esityksessä esiintyy suorakulmaisia pulsseja.

2. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen x (input) ja mitattavan jännitteen y (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteen: jännite x olkoon syöte ja y tuloste. Selvitä millä tavalla $y(t)$:n spektri $Y(f)$ riippuu $x(t)$:n spektristä $X(f)$. Selvitä lopuksi miten $y(t)$:n amplitudispektri voidaan esittää $x(t)$:n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite y on sama kuin pisteiden c ja d välinen jännite. Merkitse piirissä $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ kulkevaa virtaa I :llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä $U = RI$, $U = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ (yhtälöksi pitäisi saada $x = RCy' + y$). Mittarin y kautta kulkeva virta oletetaan nolaksi (yhtälöksi pitäisi saada $x = RCy' + y$). Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fourier-muunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



3. Signaalista $f(x)$ on saatu 1000 näytettä aikavälillä $[0, 1]$ tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono $(f_0, f_1, \dots, f_{999})$. Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \dots, F_{999})$. Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat F_{120} , F_{480} , F_{722} ja F_{960} ?
4. Signaalista $s_{230}(x) = \sin(2\pi \cdot 230x)$ otetaan näytteitä tasavälein alkaen pisteestä $x = 0$, mikä on näytteenottotaajuuden oltava, että alkuperäinen signaali voitaisiin rekonstruoida?

Näytteitä otetaan kuitenkin taajudella 120. Etsi taajuuden 230 alittavat sini-funktiot jotka tällöin antavat samat näytteet kuin $s_{230}(x)$.

5. Etsi 2×2 -matriisi U , joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on U :n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille $(1, 0)^T$ ja $(0, 1)^T$.

6. *Neoconocephalus robustus* -lajin hepokatti tuottaa 6,6 kHz taajuisen, yli kilometrin päähän kuuluvan äänen. *Nikon Coolpix 5200* -kameran mikrofoni ei silti taltioi sen ääntä edes lähietäisyydeltä. Mitä voidaan tällöin päätellä taajuudesta, jolla mikrofoni taltioi ääninäytteitä?
7. Olkoon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ja $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \text{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$. Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke F_{l-r} :lle, vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.

8. Laske jonon $(4, 1, 4, 0)$ diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä FFT-algoritmia.
9. Oletetaan tunnetuksi että diskreetin Fourier-muunnoksen välittävä matriisi U on unitaarinen, ts. $U^*U = UU^* = I$. Osoita tämän perusteella oikeaksi diskreettejä Fourier-muunnoksia koskeva Parsevalin kaava

$$\sum_{l=0}^{N-1} F_l \overline{G_l} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{g_k}.$$

Ohje: yhtälön kumpikin puoli on Hermiten sisätulo. Käytä merkintöjä $\mathbf{F} = U\mathbf{f}$, $\mathbf{G} = U\mathbf{g}$ ja esitä Hermiten sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ matriisitulona $\mathbf{x}^T \overline{\mathbf{y}}$ (vrt. lineaarialgebra).