Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Määritelmä

T-jaksoisen funktion Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T}x}.$$

Lukuja $F_n \in \mathbb{C}$ kutsutaan funktion f Fourier-kertoimiksi tai spektriksi. Jos $F_n \neq 0$ tai $F_{-n} \neq 0$, sanotaan, että funktiossa f esiintyy taajuus $\frac{n}{T} = nf$. Kertoimia $F_{\pm n}$ sanotaan myös taajuuden $\frac{n}{T}$ amplitudeiksi.

Huomautus

Koska kaikki osafunktiot ovat T-jaksoisia, on myös summafunktio (mikäli suppenee) sellainen.

Kertoimien F_n selvittäminen

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

pitäisi olla

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x}\, dx$$

Huomautus

Luku α on vapaasti valittavissa. Luvun α kiinnittäminen määrää "ikkunan" $[\alpha, \alpha + T]$, josta funktiota f tarkastellaan. Tyypillisiä valintoja ovat $\alpha = 0$ ja $\alpha = -\frac{T}{2}$.

Määritelmä

$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$ ja $f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$

Lause

Olkoon f T-jaksoinen funktio, jolle toispuoleiset derivaatat ovat olemassa. Olkoon lisäksi

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)e^{-\frac{2\pi in}{T}x}\,dx.$$

Tällöin sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}$$

suppenee pisteessä x_0 kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$.

Reaalinen muoto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + B_n \sin\frac{2\pi n}{T}x),$$

missä $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$.

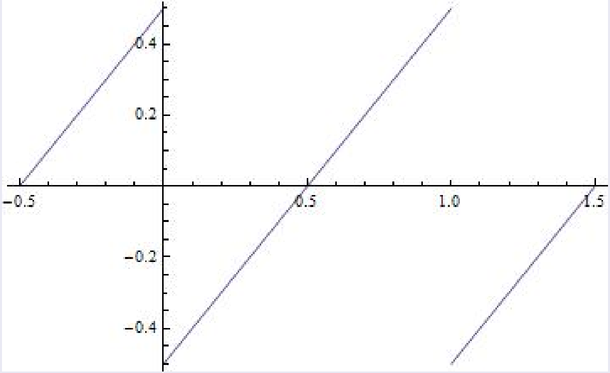
Lause

Jos f on reaaliarvoinen, ovat A_n ja B_n reaalisia.

Esimerkkejä

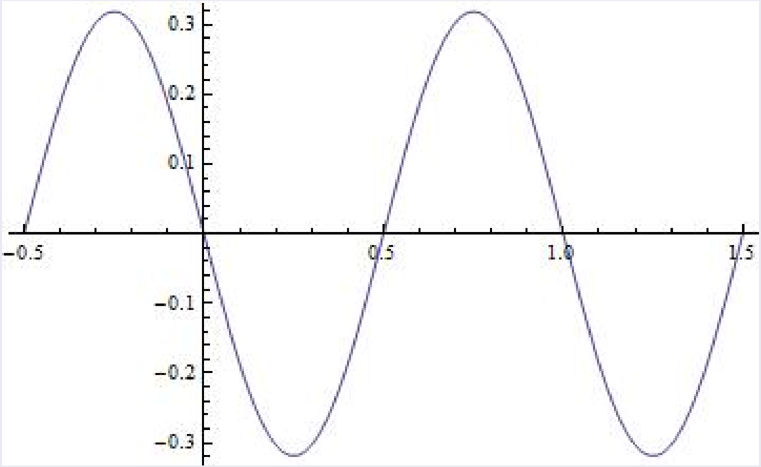
Esimerkit 37–39

$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$

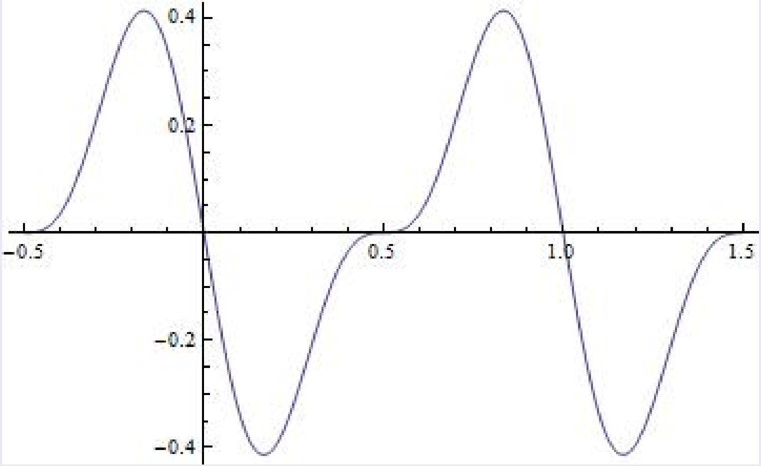


Fourier-sarjat

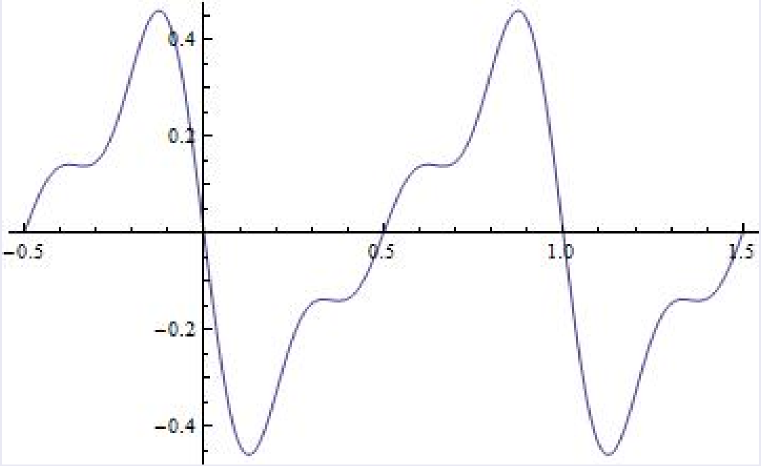
$$-\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



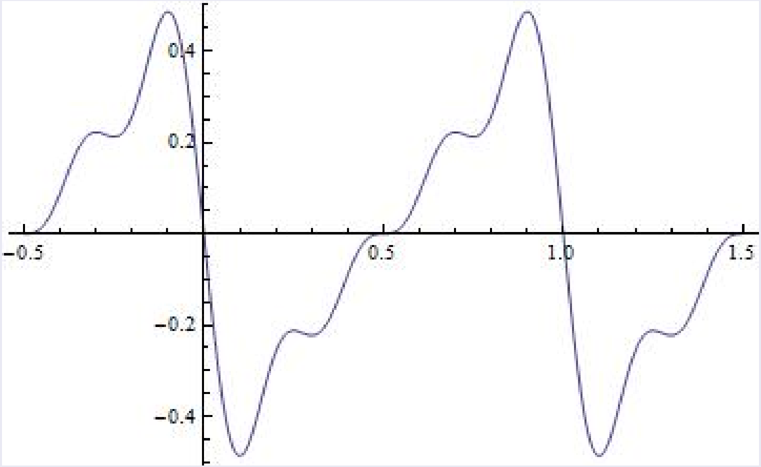
$$-\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



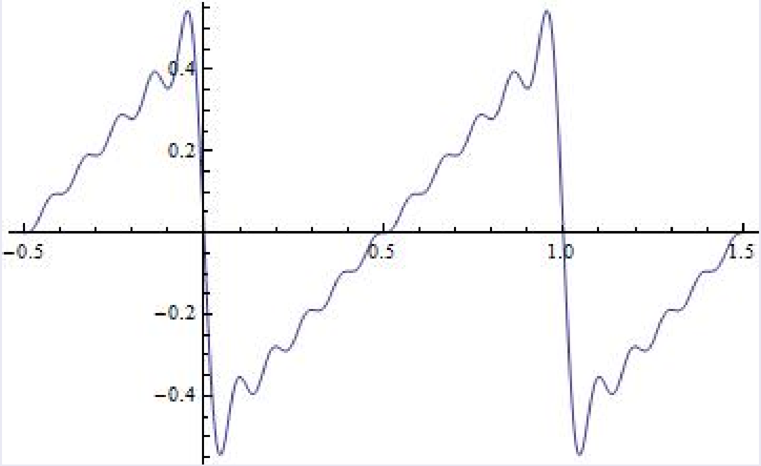
$$-\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi nx)$$



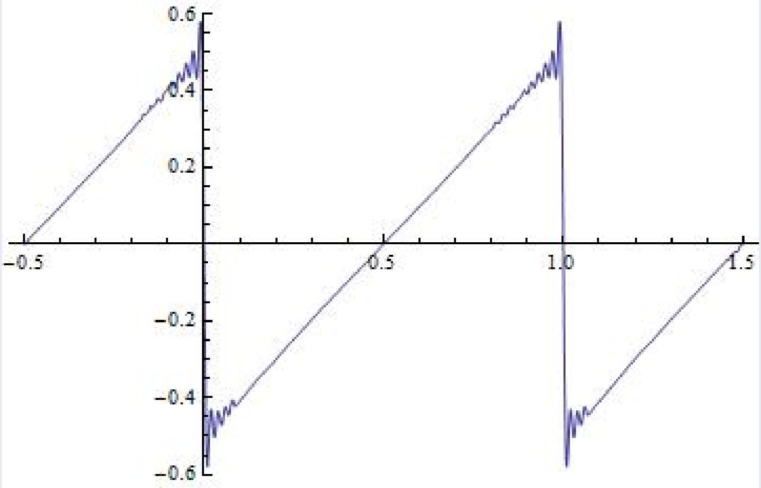
$$-\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



$$-\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi nx)$$



$$-\sum_{n=1}^{50} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



Esimerkki

Esimerkki 40

Välillä $[-\pi, \pi]$ on

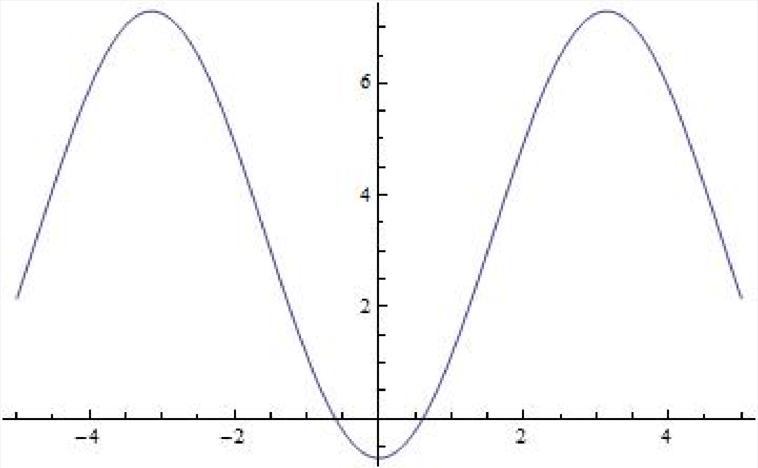
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Välillä $(0, 2\pi)$ on

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

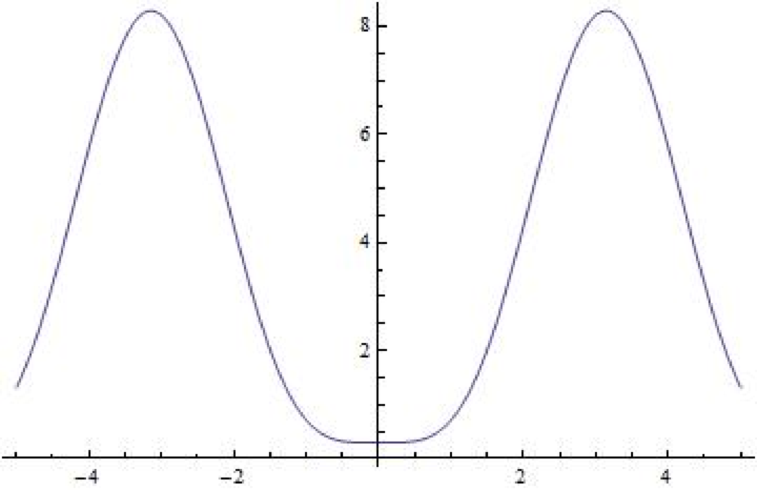
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



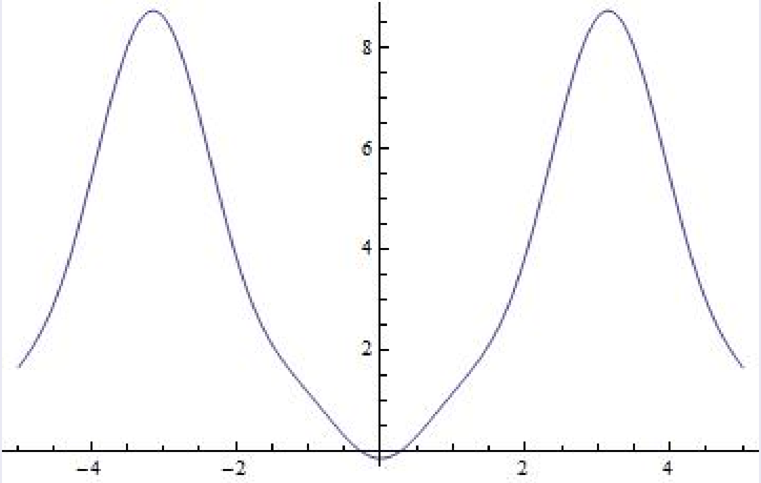
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{2} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



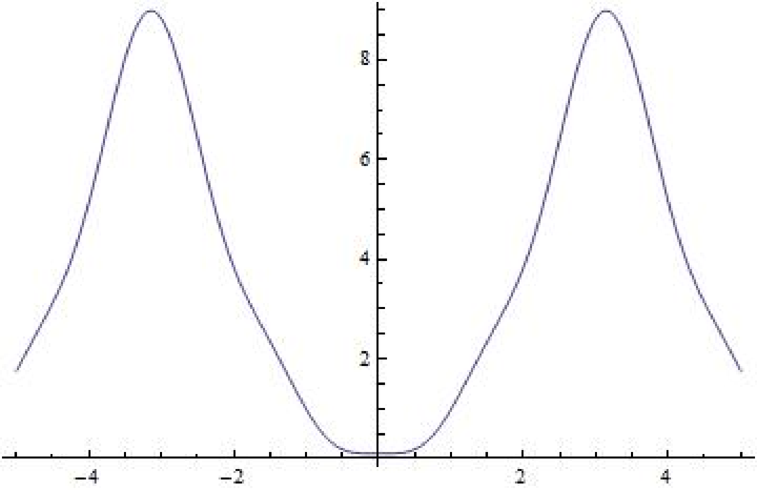
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{3} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



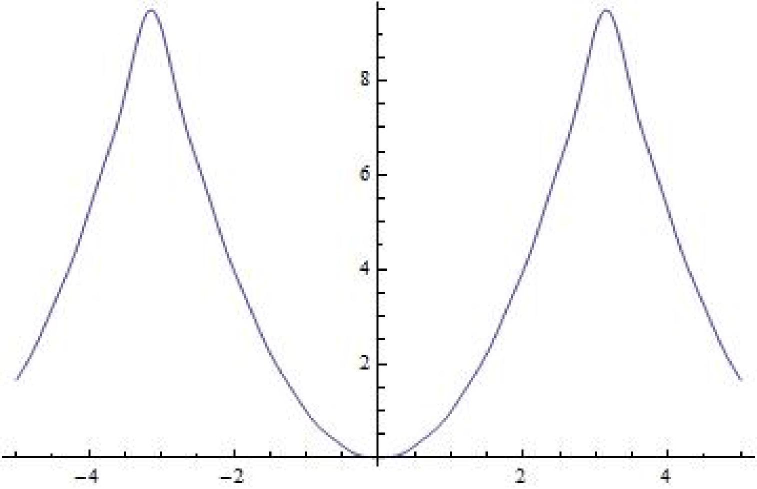
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{4} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



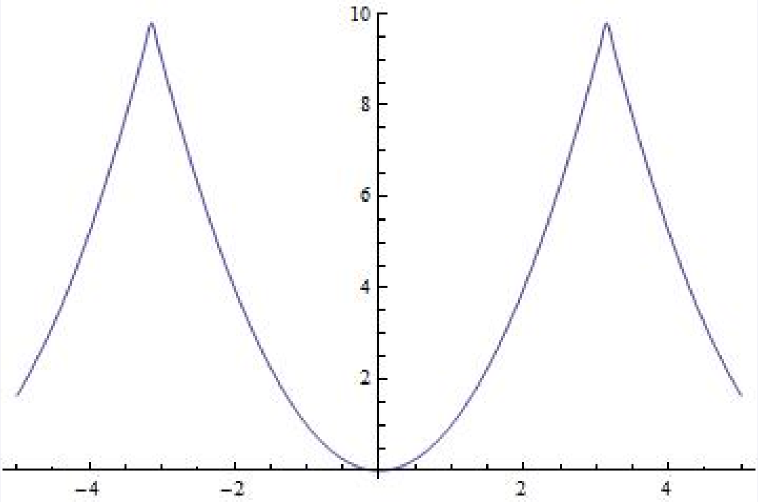
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{10} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



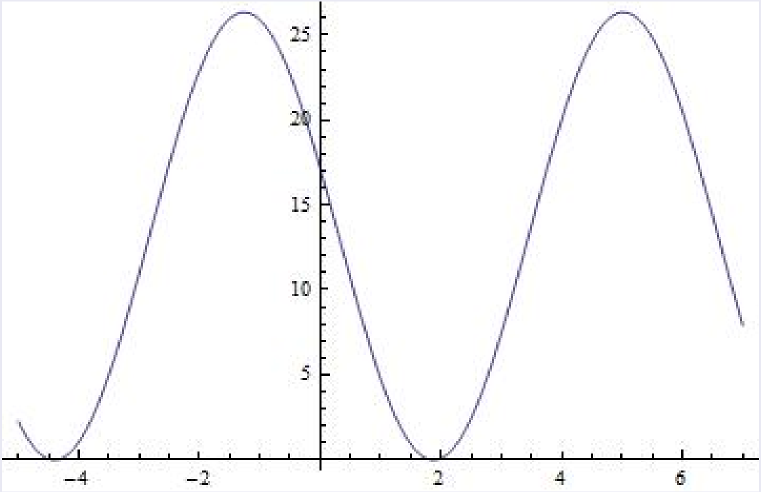
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{50} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



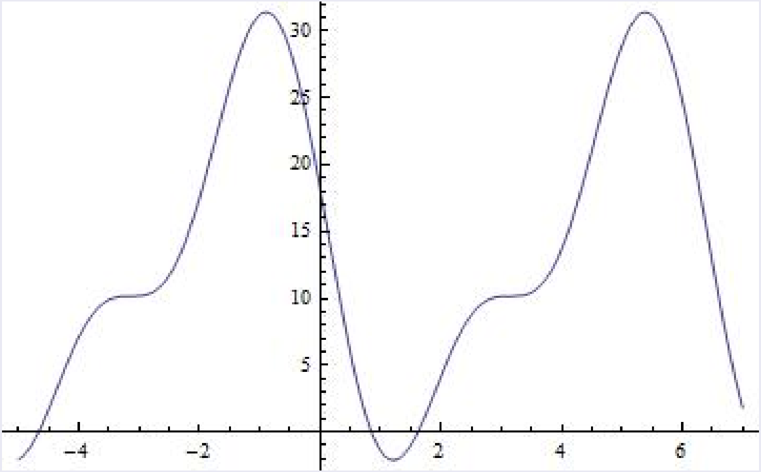
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{1} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



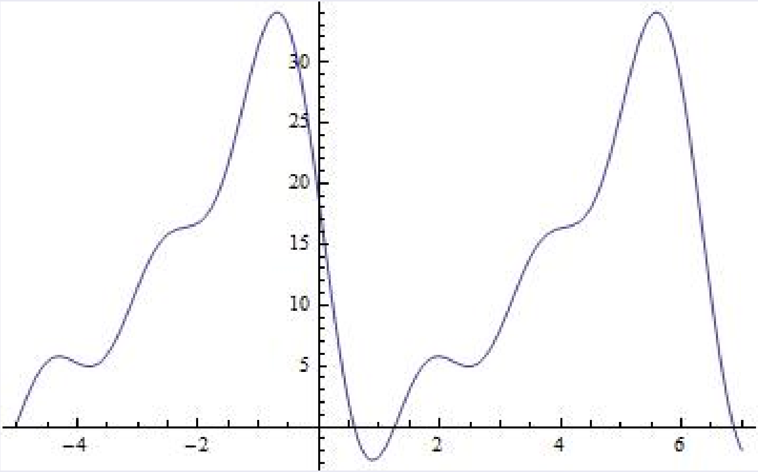
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



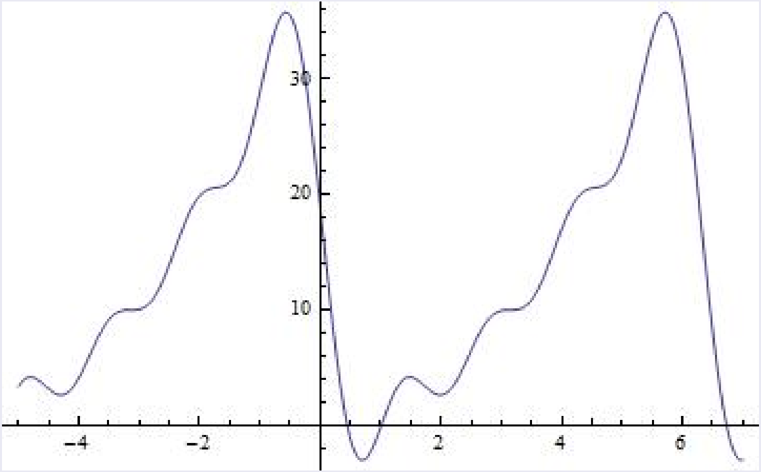
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



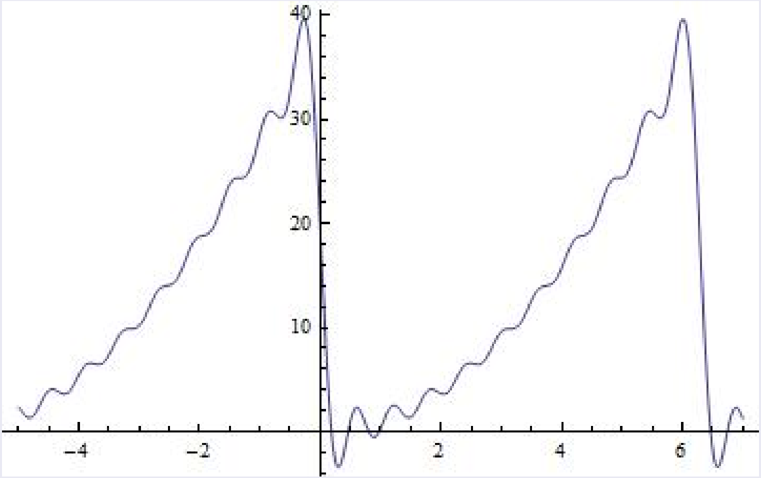
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



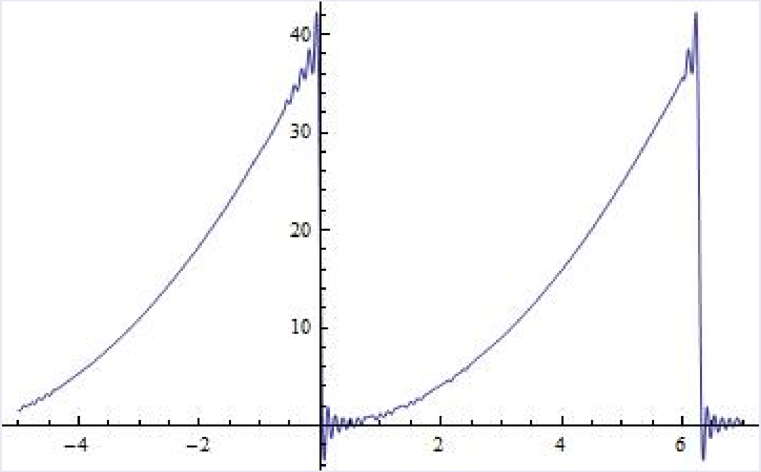
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{50} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



Lause

Olkoon f on T-jaksoinen funktio, jolla on Fourier-sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}.$$

Tällöin Fourier-sarja voidaan integroida termeittäin:

$$\int_0^x f(t)\,dt = F_0 x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} F_n \frac{T}{2\pi in}\left(e^{\frac{2\pi in}{T}x} - 1\right)$$

Lause

Jos lisäksi funktion f' toispuoleiset derivaatat ovat olemassa, voidaan Fourier-sarja derivoida termeittäin:

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi in}{T} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}$$

Termeittäin integrointi ja derivointi ovat voimassa myös reaaliselle muodolle.

Esimerkki

Esimerkki 41

$$\sigma_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\, dt$$