

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Parsevalin kaava

Jos f :llä ja g :llä on Fourier'n sarjat

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

ja

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

on tällöin

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}.$$

Parsevalin kaava

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}.$$

Plancherelin kaava

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Tulkintaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

Funktion f Fourier-sarjassa esiintyy perustaajuus $f = \frac{1}{T}$ ja sen kaikki kokonaislukumonikerrat $\frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ (jos kertoimet $\neq 0$).
Taajuus $\frac{n}{T}$ esiintyy amplitudeilla $F_{\pm n}$ (vaihtoehtoisesti: amplitudeilla A_n ja B_n)

Yleistys

Taajuuksien $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ sijasta kaikki reaalityyppiset $f \in [0, \infty)$.

Määritelmä

Funktion $f(x)$ esitystä

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x} dy$$

sanotaan Fourier'n integraaliksi ja $F(y)$:tä funktion f spektriiksi.

Huomautus

Analogisesti Fourier-sarjojen kanssa, määritellään Fourier-analyysissa kahteen suuntaan ääretön integraali (poikkeuksellisesti) Cauchyn pääarvona:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx$$

Tulkinta

Fourier'n integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x} dy$$

funktio f on esitetty y -taajuisten eksponenttifunktioiden $e^{2\pi i y x}$ "summana". Kertoimia $F(y)$ ja $F(-y)$ sanotaan taajuuden $y \geq 0$ amplitudeiksi.

Lause

Olkoon funktio f sellainen, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ on äärellisenä olemassa ja että f :llä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia äärellisillä väleillä. Tällöin f voidaan epäjatkuvuuskohtia lukuunottamatta esittää Fourier'n integraalina

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x} dy,$$

missä

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Määritelmä

Funktion f Fourier-muunnoksella tarkoitetaan funktion f spektriä F esityksessä

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x} dy$$

ja merkitään

$$F(y) = \mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Huomautus

Jos $F(y)$ on funktion $f(x)$ spektri, siis

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x} dy,$$

on

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx,$$

mikä merkitsee sitä, että funktion $F(-y)$ spektri on $f(x)$.

Määritelmä

Funktion F käänteisellä Fourier-muunnoksella tarkoitetaan seuraavaa:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{2\pi i x y} dx$$

Lause

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$$

Vaihtoehtoiset merkinnät

$$F = \mathcal{F}[f] = \hat{f}$$

Huomautus

Useissa sovelluksissa f kuvaa fysikaalisen suureen esittämää signaalia, jolloin muuttujasta käytetään merkintää t (aika). Tällöin funktion f graafisesta esityksestä (tai joskus myös funktiosta f) käytetään nimitystä aikataso.

Signaalin spektrin muuttujasta käytetään merkintää f (frekvenssi eli taajuus). Spektrin graafisesta esityksestä (tai joskus myös spektristä) käytetään nimitystä taajuustaso.

Määritelmä

Jos $F(y)$ on funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ spektri, ja

$$F(y) = |F(y)| e^{i\theta(y)}$$

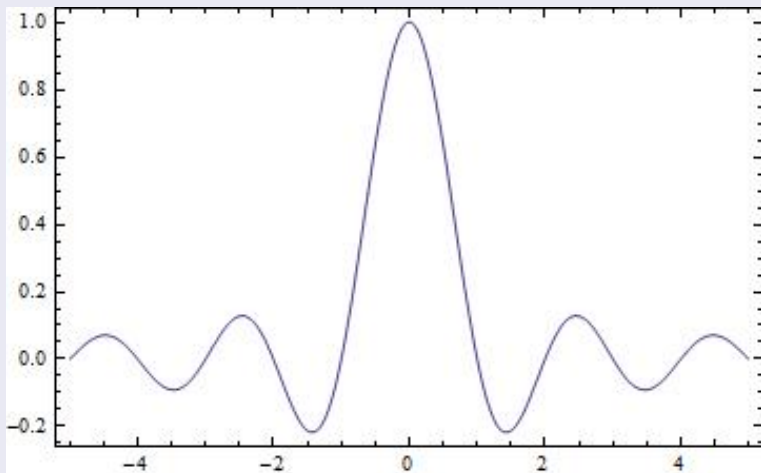
sen napakoordinaattiesitys, sanotaan, että $|F(y)|$ on amplitudispektri ja $\theta(y)$ vaihespektri.

Määritelmä

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & \text{jos } x \neq 0 \\ 1, & \text{jos } x = 0 \end{cases}$$

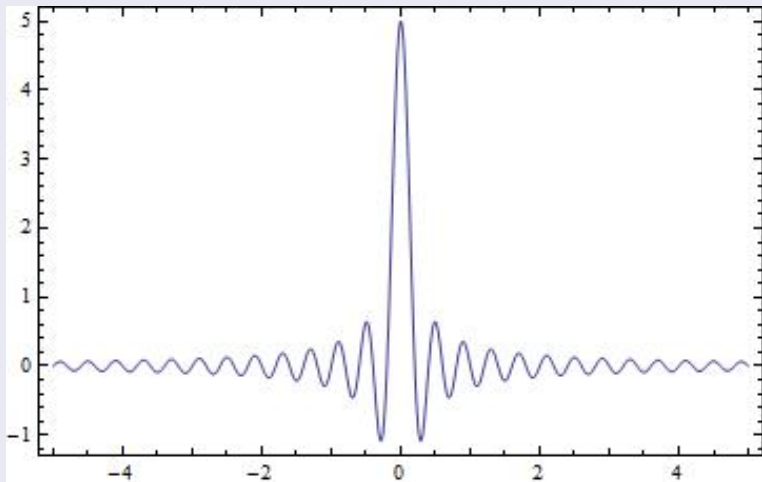
Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x, \tau = 1$



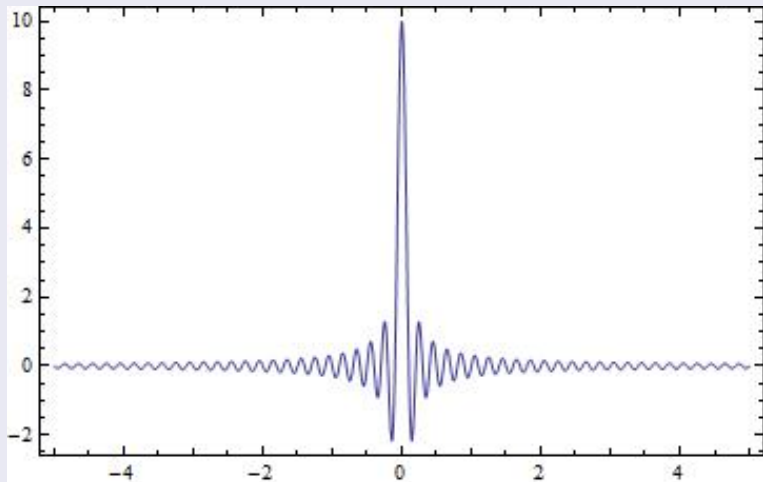
Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x, \tau = 5$



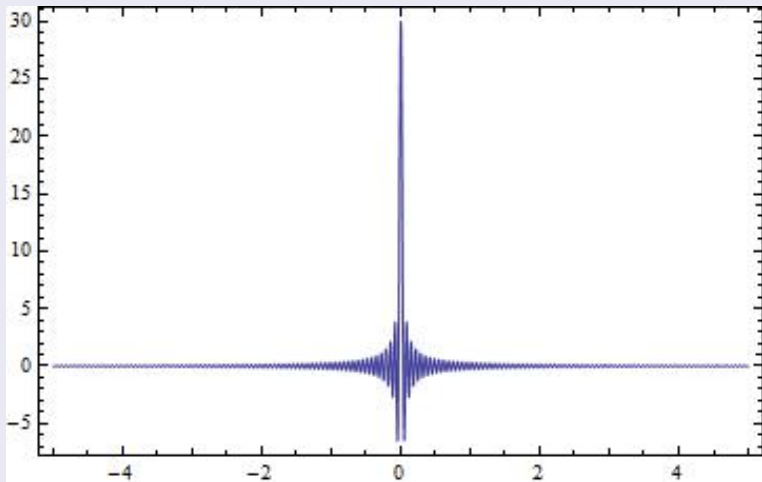
Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x, \tau = 10$



Sinc-funktio

$\tau \operatorname{sinc} \tau x, \tau = 30$



Määritelmä

Pulssifunktio

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{kun } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esimerkki 42

$$\mathcal{F}[\Pi](y) = \text{sinc } y,$$

joten

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } y \cdot e^{2\pi ixy} dy.$$

Määritelmä

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Esimerkki

- $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}](y)$ määritelmään perustuen
- Esimerkki 43
- "Sopimus": $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}](y) = \frac{1}{i\pi y}$

Reaalinen muoto

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i xy} dy \\ &= \int_0^{\infty} (A(y) \cos(2\pi xy) + B(y) \sin(2\pi xy)) dy, \end{aligned}$$

missä

$$A(y) = F(y) + F(-y) \quad \text{ja} \quad B(y) = i(F(y) - F(-y))$$

Lause

Jos f on reaaliarvoinen, on $\overline{F(y)} = F(-y)$, mistä seuraa, että $A(y)$ ja $B(y)$ ovat reaalisia.

Amplitudi – vaihe -muoto

Jos f on reaaliarvoinen, on

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} |F(y)| \cos(2\pi xy + \theta(y)) dy.$$

Lisäksi

$$F(-y) = \overline{F(y)} = \overline{|F(y)| e^{i\theta(y)}} = |F(y)| e^{-i\theta(y)}$$

ja

$$F(-y) = |F(-y)| e^{i\theta(-y)} = \left| \overline{F(y)} \right| e^{i\theta(-y)} = |F(y)| e^{i\theta(-y)}.$$

Täten reaaliarvoisille funktioille f on myös $\theta(-y) = -\theta(y)$.