

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$, on

- Lineaarisuus: $\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1] + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2]$
- Duaalisuusperiaate: $\mathcal{F}[F](x) = f(-x)$
- Kompleksinen modulaatio eli taajuussiirto:
 $\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi i y_0 x}](y) = F(y - y_0)$
- Aikasiirto: $\mathcal{F}[f(x - x_0)](y) = F(y)e^{-2\pi i x_0 y}$
- Skaalaus: Jos $\alpha > 0$, on $\mathcal{F}[f(\alpha x)](y) = \frac{1}{\alpha} F(\frac{y}{\alpha})$
- Derivointi: $\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi i y F(y)$
- Parsevalin kaava: Olkoon $G(y) = \mathcal{F}[g(x)](y)$. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y) \overline{G(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Esimerkki

τ -levyinen pulssifunktio ($\tau > 0$)

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |x| < \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } |x| = \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{jos } |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)\right](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau y)$$

Katkaistu f -taajuinen eksponenttifunktio

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi ifx} = \begin{cases} e^{2\pi ifx}, & \text{jos } |x| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{jos } |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi ifx}\right](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f))$$

f -taajuisten eksponenttifunktioiden esitys

Onko

$$e^{2\pi ifx} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_f(y) e^{2\pi ixy} dy$$

jollekin funktiolle δ_f ?

Pitäisi olla

$$\delta_f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ifx} e^{-2\pi ixy} dx.$$

Ei suppene.

Lause

Funktiota $e^{2\pi ifx}$ ei voi esittää Fourier'n integraalina

$$e^{2\pi ifx} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_f(y) e^{2\pi ixy} dy,$$

missä δ_f on funktio $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Huomautus

Esitys Fourier-sarjana on yksinkertainen:

$$e^{2\pi ifx} = e^{2\pi ifx}.$$

Katkaistu f -taajuinen eksponenttifunktio

Koska

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi ifx}\right](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f)),$$

on

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi ifx} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f))e^{2\pi ixy} dy.$$

Johtaa korkeaan "spektriipiikkiin" kohdassa $y = f$, kun τ on suuri.

"Määritelmä"

- $\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \neq 0 \\ \infty, & \text{jos } x = 0 \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0) F(y) dy = F(y_0)$
- Kuvaaja: Nuoli pystyakselin suuntaan.

f -taajuinen eksponenttifunktio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - f) e^{2\pi ixy} dy = e^{2\pi ifx},$$

siis

$$\mathcal{F}[e^{2\pi ifx}](y) = \delta(y - f),$$

Erityisesti $\mathcal{F}[1](y) = \delta(y)$.



Paul Dirac (1902–1984)

Esitystapoja

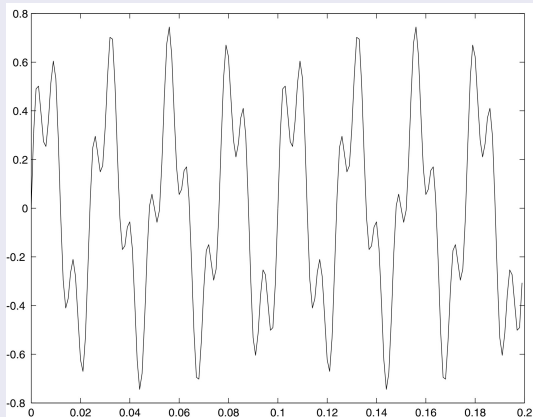
$$\begin{aligned}\delta(y) &= \mathcal{F}[1](y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} dx \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau y)\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\mathcal{F}[\sin 2\pi fx](y) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2i}(e^{2\pi ifx} - e^{-2\pi ifx})\right](y) = \frac{1}{2i}\delta(y-f) - \frac{1}{2i}\delta(y+f)$$

Diracin δ -funktio

Signaali: $\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$



Esimerkki

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t),$$

- $\mathcal{F}[s(t)](f)$?
- $|\mathcal{F}[s(t)](f)|$?

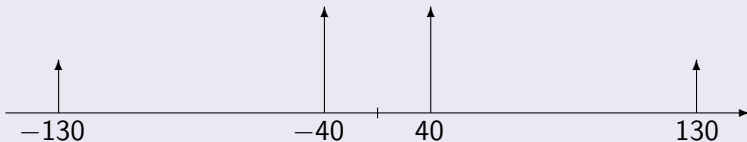
Esimerkki

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t),$$

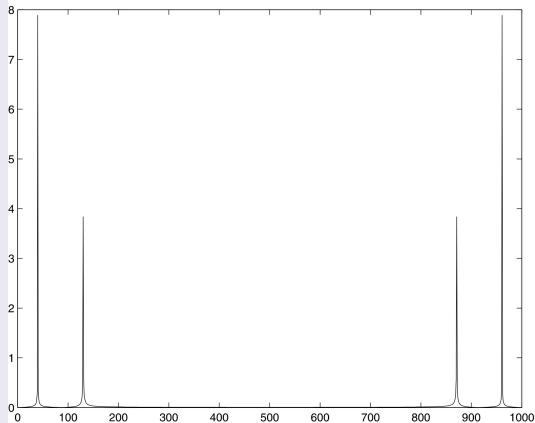
$$\mathcal{F}[s(t)](f) = \frac{1}{4i} \delta(f-40) - \frac{1}{4i} \delta(f+40) + \frac{1}{8i} \delta(f-130) - \frac{1}{8i} \delta(f+130)$$

$$|\mathcal{F}[s(t)](f)| = \frac{1}{4} \delta(f-40) + \frac{1}{4} \delta(f+40) + \frac{1}{8} \delta(f-130) + \frac{1}{8} \delta(f+130)$$

Amplitudispektrin kuvaaja



Amplitudispektri numeerisesti

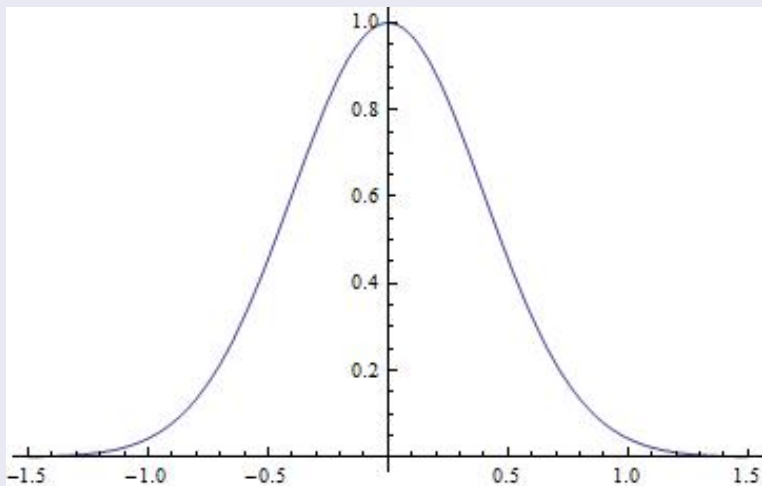


Lause

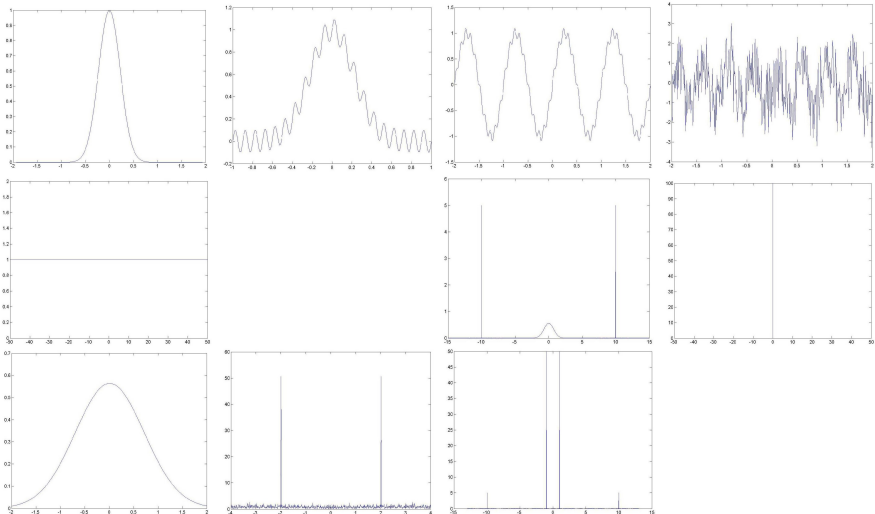
- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $x\delta(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
- $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$ kun $a > 0$
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Signaali vs. amplitudispektri

Gaussin kellokäyrä (normittamaton) $\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}] = e^{-\pi y^2}$



Signaali vs. amplitudispektri



Huomautus

Yleensä

$$\mathcal{F}[f \cdot g] \neq \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

mutta modulaatioperiaatteen mukaan

$$\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi i y_0 x}](y) = F(y - y_0)$$

Onko mahdollista esittää funktio g eksponenttifunktioiden avulla?

Määritelmä

Funktioiden f ja g konvoluutio:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t) dt$$

Lause

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$
- $D(f * g) = Df * g = f * Dg$

Lause

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

Esimerkki

Esimerkit 47–49

Esimerkki

$$f * \delta$$