

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Esimerkki

Esimerkit 47–49

Esimerkki

$$f * \delta$$

Määritelmä

$$H(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0 \end{cases}$$

Määritelmä

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x),$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t)dt$$

Esimerkki 50

Parsevalin kaava:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \overline{G(y)} dy$$

Esimerkki 52

Derivointiperiaate:

$$\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi iy \mathcal{F}[f(x)](y)$$

Integrointiperiaate ?

Signaali käytännössä

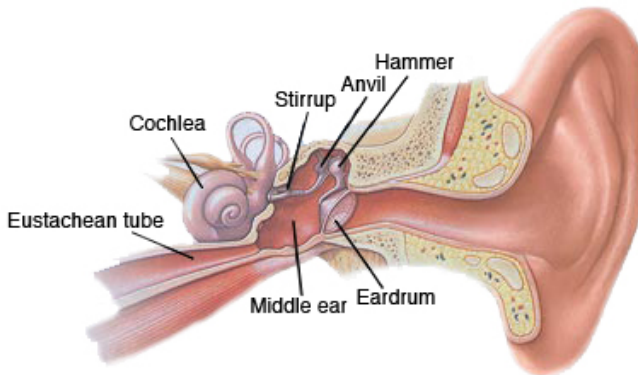
Sovelluksissa f on yleensä ajan myötä muuttuva fysikaalinen suure. Esimerkiksi

- Ilmanpaineen vaihtelu (ääni)
- Jännitteen vaihtelu (lankapuhelimet, DSL-linjat)
- Sähkö- ja magneettikentän vaihtelu (esim. valo, radioaallot)

Huomautus

Sovelluksissa ei yleensä voida saada eksplisiittistä lauseketta $f(x)$:lle. Tästä seuraa, että spektrin laskeminen tavallisin differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin analyttisesti ei onnistu.

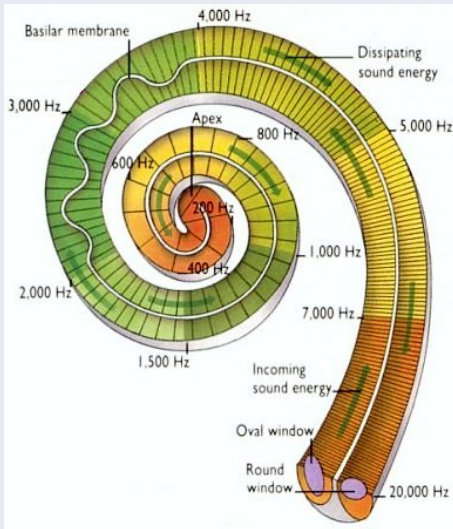
Korvan rakenne



© Mayo Foundation for Medical Education and Research. All rights reserved.

Analoginen "Fourier-muunnin"

Korvasimpukka



Signaali käytännössä

- Sovelluksissa ei voida yleensä tuntea signaalia $f(x)$ miten tarkasti tahansa.
- Käytännössä joudutaan tyytymään *näytteisiin* $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... ja vieläpä näidenkin likiarvoihin.
- Signaalin korkeat taajuudet jäävät taltioimatta. Määre "korkeat", riippuu näytteenottopisteiden x_0 , x_1 , x_2 , ... välistä.
- Esimerkki: CD-audio -standardia varten mikrofonin tulee taltioida ilmanpaineen arvo 44100 kertaa sekunnissa. Kukin taltiointi (näyte) esitetään 16 bittiä käyttäen. Stereoääntä varten tarvitaan tällöin $2 \cdot 44100 \cdot 16 \text{ b}$ ($\approx 172 \text{ kB}$) sekunnissa.

Määritelmä

Sanotaan, että funktio

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i xy} dy$$

sisältää taajuuden y , jos $F(y) \neq 0$ tai $F(-y) \neq 0$.

Jos funktio f ei sisällä B :tä korkeampia taajuuksia, on siis $F(y) = 0$, kun $|y| \geq B$

Esimerkki

Esimerkki 55

Nyquistin-Shannonin näytteenottolause

Jos funktio f ei sisällä B :tä eikä sitä korkeampia taajuuksia, voidaan f epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta selvittää arvoista $d_n = f(\frac{n}{2B})$.

Lisäksi pätee (Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n)$$

Huomautus

Nyquistin-Shannonin näytteenottolauseessa esiintyvää taajuutta $2B$ kutsutaan Nyquistin näytteenottotaajuudeksi ja väliä $\frac{1}{2B}$ sanotaan Nyquistin näytteenottoväliksi.

Nyquistin-Shannonin lauseen todistus

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy.$
- Arvot $\frac{d_{-n}}{2B} = \frac{1}{2B}f(\frac{-n}{2B}) = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B F(y)e^{-\frac{2\pi in}{2B}y} dy$ ovat spektrin $F(y)$ Fourier-sarjan kertoimet, joten

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi in}{2B}y}.$$

- $f(x) = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy = \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n).$

Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava

Kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta\left(x - \frac{n}{2B}\right) \right) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx) \end{aligned}$$

Huomautus

Jos $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(y)](x)$, on

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(y) \cdot \Pi\left(\frac{y}{2B}\right)\right](x) = f(x) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx)$$

Tulkinta

Näytteistä $d_n = f(\frac{n}{2B})$ rekonstruoidaan alkuperäinen signaali seuraavasti:

- Muodostetaan “Diracin kampa”

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B})$$

- Leikataan tästä taajuuden B ylittävät osat kertomalla spektri pulssifunktiolla $\Pi(\frac{y}{2B})$.
- Tulos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B}) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx).$$

Jatkuvan ja pistespektrin yhdistäminen

Fourierin integraali

Integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i xy} dy$$

spektri $F(y)$ on määritelty kaikilla $y \in \mathbb{R}$ (jatkuva spektri).

Fourierin sarja

Sarjassa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

spektri F_n on määritelty vain n :n kokonaislukuarvoilla (F_n vastaa taajuutta $\frac{n}{T}$). Tätä kutsutaan pistespektriksi.

Pistespektri integraalissa

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

määritellään

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y} dy?$$

Esimerkki

Esimerkki 56

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Signaali f on aikarajoitettu, jos on sellainen väli $[0, M]$, että $f(x) = 0$ aina kun $x \notin [0, M]$.

Tasaväliset näytteet

Olkon f aikarajoitettu välille $[0, M]$ ja $M = N \cdot \Delta x$. Merkitään $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(\Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, $\dots$, $f_{N-1} = f((N-1)\Delta x)$

Huomatus

Nyquistin-Shannonin lauseen mukaan vain arvoa $B = \frac{1}{2\Delta x}$ matalammat taajuudet voidaan rekonstruoida.

Huomautus

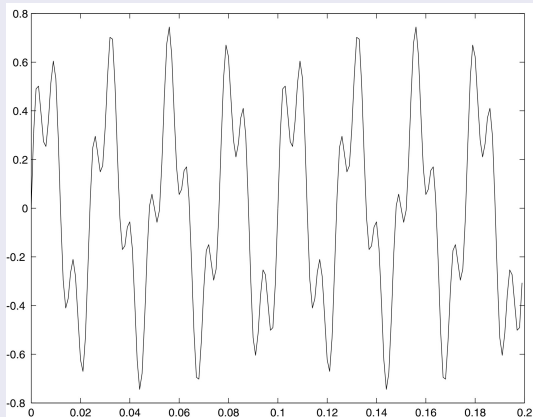
Spektrin rekonstruktio Fourier-sarjana

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi i n}{2B} y}.$$

on $2B$ -jaksoinen funktio ja tätä voidaan tarkastella välillä $[-B, B]$ tai yhtä hyvin välillä $[0, 2B]$.

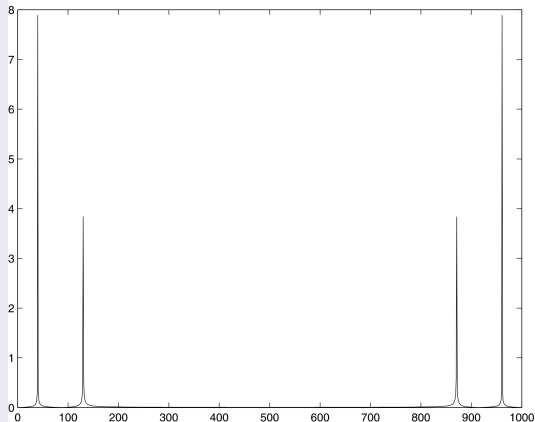
Valitaan spektrin tarkasteluväliksi $[0, 2B]$ symmetrian vuoksi.

$$\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$$



Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Signaalin $\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$ amplitudispektri



Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Ongelma: DFT:n muotoilu

Jos $M = N \cdot \Delta x$ ja signaalista tunnetaan vain arvot $f_0 = (0 \cdot \Delta x)$, $f_1 = (1 \cdot \Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, ..., $f_{N-1} = f((N-1) \cdot \Delta x)$, kuinka tiheästi voidaan spektrin arvo määrittää välillä $[0, 2B]$?

Duaaliperiaate

Tarkastellaan spektriä F välillä $[0, 2B]$ määriteltynä funktiona ja $f(-x)$:ää tämän välillä $[-M, 0]$ (tai välillä $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$) määriteltynä spektrinä. Tällöin voidaan välein $\Delta y = \frac{1}{2 \cdot \frac{M}{2}} = \frac{1}{M} = \frac{1}{N \Delta x}$ rekisteröidystä F :n arvoista rekonstruoida F uudelleen.

DFT:n muotoilu

Asetetaan $\Delta y = \frac{1}{N \Delta x}$ ja lasketaan spektrin arvot pisteissä $0 \cdot \Delta y$, $1 \cdot \Delta y$, ..., $(N-1) \cdot \Delta y$. Valitaan symmetrian vuoksi $\Delta y = \Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

DFT:n muotoilu

Integraalia

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i xy} dx = \int_0^{N\Delta x} f(x) e^{-2\pi i xy} dx$$

approksimoidaan Riemann-summalla

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta x) e^{-2\pi i k\Delta x \cdot y} \Delta x$$

ja tälle lausekkeelle lasketaan arvo F_l pisteissä $y = l \cdot \Delta y$. Tällöin

$$F_l = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k\Delta x \cdot l \cdot \Delta y} \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jonon $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$, missä

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$$

Määritelmä

Jono $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on jono $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, missä

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = \text{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$$