Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2025

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jonon $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$, missä

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jonon $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on jono $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, missä

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = \mathrm{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Olkoon $S_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Äärellisen joukon k-taajuinen eksponenttifunktio on

$$e_k(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Olkoon $S_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Äärellisen joukon k-taajuinen eksponenttifunktio on

$$e_k(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

Huomautus

$$e_{N-k}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(N-k)l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i l} e^{2\pi i \frac{-kl}{N}} = e_{-k}(l)$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Olkoon $S_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Äärellisen joukon k-taajuinen eksponenttifunktio on

$$e_k(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

Huomautus

$$e_{N-k}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(N-k)l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i l} e^{2\pi i \frac{-kl}{N}} = e_{-k}(l)$$

Seuraus (N-jaksollisuus)

$$e_k(l+N) = e_k(l)$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{jos } 1 \leq l < N \\ \mathrm{N}, & \text{jos } l = 0 \end{cases}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{jos } 1 \leq l < N \\ \text{N}, & \text{jos } l = 0 \end{cases}$$

Todistus

Tapaus $l = 0$ on ilmeinen. Jos $l \neq 0$, on $e^{\frac{2\pi il}{N}} \neq 1$ ja

$$e^{\frac{2\pi il}{N}} S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi il}{N}} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i(k+1)l}{N}} = S$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{jos } 1 \leq l < N \\ \text{N}, & \text{jos } l = 0 \end{cases}$$

Todistus

Tapaus $l = 0$ on ilmeinen. Jos $l \neq 0$, on $e^{\frac{2\pi il}{N}} \neq 1$ ja

$$e^{\frac{2\pi il}{N}} S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi il}{N}} e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i(k+1)l}{N}} = S$$

Täten

$$(e^{\frac{2\pi il}{N}} - 1)S = 0,$$

mistä seuraa, että $S = 0$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$\mathrm{DFT}^{-1}\,\mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$\mathrm{DFT}^{-1}\,\mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Todistus

Merkitään $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ ja lasketaan jonon $\mathrm{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ k:s jäsen g_k:

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi ikl}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi iml}{N}} \right) e^{\frac{2\pi ikl}{N}}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$\mathrm{DFT}^{-1}\,\mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Todistus

Merkitään $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ ja lasketaan jonon $\mathrm{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ k:s jäsen g_k:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi i m l}{N}} \right) e^{\frac{2\pi i k l}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i l (k-m)}{N}} = f_k \end{aligned}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$\mathrm{DFT}^{-1}\,\mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Todistus

Merkitään $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{DFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ ja lasketaan jonon $\mathrm{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ k:s jäsen g_k:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi i m l}{N}} \right) e^{\frac{2\pi i k l}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i l (k-m)}{N}} = f_k \end{aligned}$$

Esimerkki

Esimerkki 57

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Huomautus

Jos jokainen F_l lasketaan esityksen

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}$$

mukaisesti, pitää jonon $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$ määrittämiseksi suorittaa likimain $N \cdot 2N = 2N^2$ yhteen- ja kertolaskua. Lisäksi pitää laskea eksponenttifunktion arvot.

Fast Fourier Transform (FFT)

Hajoita ja hallitse -menetelmä

Ongelman ratkaisua varten

Fast Fourier Transform (FFT)

Hajoita ja hallitse -menetelmä

Ongelman ratkaisua varten

- Syöte S hajoitetaan osiin S_1 ja S_2

Fast Fourier Transform (FFT)

Hajoita ja hallitse -menetelmä

Ongelman ratkaisua varten

- Syöte S hajoitetaan osiin S_1 ja S_2
- Ratkaistaan ongelma osille S_1 ja S_2 erikseen

Fast Fourier Transform (FFT)

Hajoita ja hallitse -menetelmä

Ongelman ratkaisua varten

- Syöte S hajoitetaan osiin S_1 ja S_2
- Ratkaistaan ongelma osille S_1 ja S_2 erikseen
- Yhdistetään osaratkaisut

DFT:n hajoitus

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}$$

Fast Fourier Transform (FFT)

DFT:n hajoitus

$$
\begin{aligned}
F_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{2m \cdot l}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{(2m+1) \cdot l}{N}}
\end{aligned}
$$

Fast Fourier Transform (FFT)

DFT:n hajoitus

$$
\begin{aligned}
F_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{2m \cdot l}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{(2m+1) \cdot l}{N}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{m \cdot l}{N/2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \frac{l}{N}} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{m \cdot l}{N/2}}
\end{aligned}
$$

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos
$(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$.

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$.

- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$.

- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.
- Jos $N > 1$, laske $(G_0, G_1, \ldots, G_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$ ja $(H_0, H_1, \ldots, H_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$.

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$.

- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.
- Jos $N > 1$, laske $(G_0, G_1, \ldots, G_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$ ja $(H_0, H_1, \ldots, H_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$.
- Jokaista $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ kohti laske $F_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_l + e^{-2\pi i \frac{l}{N}} H_l)$. Luvun $N/2 - 1$ ylittäville l:n arvoille tulkitaan $G_l = G_{l-N/2}$ ja $H_l = H_{l-N/2}$.

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos
$(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$.

- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.
- Jos $N > 1$, laske $(G_0, G_1, \ldots, G_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$ ja $(H_0, H_1, \ldots, H_{N/2-1}) = \mathrm{FFT}(f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$.
- Jokaista $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ kohti laske $F_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_l + e^{-2\pi i \frac{l}{N}} H_l)$. Luvun $N/2 - 1$ ylittäville l:n arvoille tulkitaan $G_l = G_{l-N/2}$ ja $H_l = H_{l-N/2}$.
- Tulosta $(F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$.

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Fast Fourier Transform

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N$$

Fast Fourier Transform

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned} T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\ &= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N \end{aligned}$$

Fast Fourier Transform

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned} T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\ &= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \end{aligned}$$

Fast Fourier Transform

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned} T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\ &= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\ &= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N \end{aligned}$$

Fast Fourier Transform

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned} T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\ &= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\ &= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \end{aligned}$$

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\
&= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\
&= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \\
&= 16T(N/16) + 4 \cdot 4N = \ldots
\end{aligned}$$

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\
&= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\
&= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \\
&= 16T(N/16) + 4 \cdot 4N = \ldots \\
&= 2^r T(N/2^r) + r \cdot 4N
\end{aligned}$$

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N-pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\
&= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\
&= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \\
&= 16T(N/16) + 4 \cdot 4N = \ldots \\
&= 2^r T(N/2^r) + r \cdot 4N \\
&= NT(1) + r \cdot 4N = 4N \log_2 N
\end{aligned}$$