# Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2024

## Demonstraatio 1, 14.11.2024

**Älä käytä tehtävissä tekoälyä vaan omaasi**

1. Selvitä onko vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = (2,1)$ ja $\boldsymbol{v}_2 = (3,-1)$ avulla (lineaarikombinaationa) mahdollista muodostaa vektori $(-3,6)$?

   Mallivastaus: Pitää selvittää onko sellaisia lukuja $c_1$ ja $c_2$ että $(-3,6) = c_1(2,1) + c_2(3,-1) = (2c_1 + 3c_2, c_1 - c_2)$, jolloin siis pitää ratkaista yhtälöryhmä

   $$\begin{cases} 2c_1 & +3c_2 & = & -3 \\ c_1 & -c_2 & = & 6 \end{cases}$$

   Esimerkiksi kertomalla alempi yhtälö luvulla $-2$ ja laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $5c_2 = -15$, josta $c_2 = -3$. Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $2c_1 = 6$, josta $c_1 = 3$. Vaihtoehtoisesti yhtälöparin voi ratkaista Gaussin-Jordanin menetelmällä.

2. Selvitä onko vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)$ ja $\boldsymbol{v}_2 = (-1,2,-1)$ avulla (lineaarikombinaationa) mahdollista muodostaa vektori $(1,2,3)$?

   Mallivastaus: Pitää selvittää onko olemassa luvut $c_1$ ja $c_2$ joille yhtälö $(1,2,3) = c_1(1,0,1) + c_2(-1,2,-1)$ toteutuu. Tämä on yhtäpitävää yhtälöryhmän

   $$\begin{cases} c_1 & -c_2 & = & 1 \\ & 2c_2 & = & 2 \\ c_1 & -c_2 & = & 3 \end{cases}$$

   kanssa.

   Vertaamalla ensimmäistä ja kolmatta yhtälöä voidaan todeta, että ratkaisua ei ole. Vaihtoehtoisesti yhtälöryhmän ratkaisuja voidaan hakea Gaussin-Jordanin menetelmällä ja todeta että ratkaisuja ei ole.

3. Määritellään joukko $A \subseteq \mathbb{R}^2$ seuraavasti: $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$. Selvitä onko $A$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Ohje: On selvitettävä kuuluuko joukon $A$ alkioiden summa sekä skalaarimonikerta joukkoon $A$.

   Mallivastaus: Kyseinen joukko ei ole aliavaruus, sillä $(1,1) \in A$ sekä $(2,4) \in A$, mutta $(1,1) + (2,4) = (3,5) \notin A$.

4. Määritellään joukko $A \subseteq \mathbb{R}^2$ seuraavasti: $A = \{(x,y) \mid 2x - 3y = 0\}$. Selvitä onko $A$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Ohje: Samoin kuin edellisessä tehtävässä.

   Mallivastaus: oletetaan, että $(x,y) \in A$. Tällöin $2x - 3y = 0$, mistä luvulla $c$ kertomalla huomataan, että $2 \cdot cx - 3 \cdot cy = 0$, joten myös $c(x,y) = (cx, cy) \in A$. Oletetaan sitten, että $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2) \in A$. Tällöin $2x_1 - 3y_1 = 0$ ja $2x_2 - 3y_2 = 0$ ja laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan $2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0$. Täten siis myös $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in A$. Joukko $A$ on siis suljettu skalaarikertolaskun sekä vektoriyhteenlaskun suhteen, joten se on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus.

5. Selvitä onko vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1)$ ja $\boldsymbol{v}_3 = (1,3)$ avulla saada (lineaarikombinaationa) vektori $(1,2)$ jopa kahdella eri tavalla? Muodostavatko vektorit $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ja $\boldsymbol{v}_3$ lineaarisesti riippumattoman joukon?

Mallivastaus: On etsittävä sellaiset luvut $c_1$, $c_2$, $c_3$, että

$$(1,2) = c_1(1,-1) + c_2(2,1) + c_3(1,3), \tag{1}$$

mikä on sama asia kuin yhtälöryhmän

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} c_1 & +2c_2 & +c_3 & = & 1 \\ -c_1 & +c_2 & +3c_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

ratkaiseminen. Tämän yhtälöryhmän augmentoitu matriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lisäämällä 1. rivi toiseen saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

kertomalla 2. rivi luvulla $\frac{1}{3}$ saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

ja lisäämällä 2. rivi ensimmäiseen luvulla $-2$ kerrottuna saadaan matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

jota vastaa yhtälöpari

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} c_1 & & -\frac{5}{4}c_3 & = & -1 \\ & c_2 & +\frac{4}{3}c_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Tästä voidaan lukea kaikki ratkaisut:

$$\begin{aligned} (c_1, c_2, c_3) &= (\frac{5}{3}c_3, \frac{4}{3}c_3, c_3) + (-1,1,0) \\ &= \frac{1}{3}c_3(5,-4,3) + (-1,1,0), \end{aligned}$$

missä $c_3 \in \mathbb{R}$. Tästä nähdään, että ratkaisuja yhtälölle (1) on äärettömän monta, esim. valitsemalla $c_3 = 0$ saadaan $(c_1, c_2, c_3) = (-1,1,0)$ ja valitsemalla esim. $c_3 = 3$ saadaan $(c_1, c_2, c_3) = (4,-3,3)$.

Tehtävän vektorijoukko ei siis ole kanta, vektorin $(2,-4)$ esitys sen avulla ei ole yksikäsitteinen. On mahdollista kylläkin todeta, että kyseinen kolmen vektorin joukko riittää generoimaan koko $\mathbb{R}^2$:n.

6. Miksi $B = \{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta? Esitä vektori $(-1,5)$ tämän kannan avulla. Ohje jälkimmäiseen tehtävään: Etsi sellaiset luvut $c_1$ ja $c_2$, että

$$(-1,5) = c_1(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) + c_2(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}).$$

Ota huomioon, että $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j} = (1,1)$ ja $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j} = (1,-1)$.

Mallivastaus: Vektorit $(1,1)$ ja $(1,-1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat, sillä yhtälö $c_1(1,1) + c_2(1,-1) = (0,0)$ on ekvivalentti yhtälöparin

$$\left\{\begin{array}{rrcr} c_1 & +c_2 & = & 0 \\ c_1 & -c_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

kanssa. Helposti todetaan, että tämän ainoa ratkaisu on $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Laskemalla yhteen voidaan todeta että $2\boldsymbol{i} = (1, 1) + (1, -1)$, josta $\boldsymbol{i} = \frac{1}{2}((1, 1) + (1, -1))$ ja vähentämällä saadaan $2\boldsymbol{j} = (1, 1) - (1, -1)$, josta $\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}((1, 1) - (1, -1))$. Näin ollen kannan $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ vektorit voidaan esittää joukon $B$ vektoreiden lineaarikombinaatioina, joten siis joukko $B$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$. Koska se todettiin jo lineaarisesti riippumattomaksi, se on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Vektorille $(-1, 5)$ saadaan esitys kannan $B$ avulla esim. seuraavasti:

$$(-1, 5) = -\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j} = -\frac{1}{2}((1, 1)+(1, -1))+5\cdot\frac{1}{2}((1, 1)-(1, -1)) = 2(1, 1)-3\cdot(1, -1).$$

7. Valitaan kantapolynomeiksi 1, $x$, $x(x-1)$ ja $x(x-1)(x-2)$. Etsi polynomille $2x^3 - x^2 + x - 1$ esitys valittujen kantapolynomien avulla. Ohje: On löydettävä sellaiset luvut $c_0$, $c_1$, $c_2$ ja $c_3$, että

$$2x^3 - x^2 + x - 1 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x(x-1) + c_3 \cdot x(x-1)(x-2).$$

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} & c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x(x-1) + c_3 \cdot x(x-1)(x-2) \\ = \ & c_0 + c_1 x + c_2(x^2 - x) + c_3(x^3 - 3x^2 + 2x) \\ = \ & c_0 + (c_1 - c_2 + 2c_3)x + (c_2 - 3c_3)x^2 + c_3 x^3. \end{aligned}$$

Vertaamalla kertoimia tehtävän polynomiin saadaan yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{ccccrcr} c_0 & & & & & = & -1 \\ & c_1 & -c_2 & +2c_3 & & = & 1 \\ & & c_2 & -3c_3 & & = & -1 \\ & & & c_3 & & = & 2 \end{array} \right. ,$$

jonka alimmasta yhtälöstä selviää $c_3$, tämän avulla toiseksi alimmasta $c_2$, jne. Näin ollen $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (-1, 2, 5, 2)$ ja siis

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = -1 + 2x + 5x(x-1) + 2x(x-1)(x-2)$$

8. Mikä on yhtälöparin

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} -2x & - & y & = -2 \\ 3x & + & y & = 3 \end{array} \right.$$

kerroinmatriisi? Entä augmentoitu matriisi? Saata augmentoitu matriisi redusoituun porrasmuotoon ja totea tästä yhtälöparin ratkaisut.

Mallivastaus: Kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

augmentoitu matriisi

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Augmentoidusta matriisista saadaan redusoitu porrasmuoto seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ratkaisut ovat $(x, y) = (1, 0)$.

9. Mikä on yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -x & -2y & +2z & = & -1 \\ 3x & +y & & = & -2 \\ -x & -y & +z & = & 3 \end{cases}$$

kerroinmatriisi? Entä augmentoitu matriisi? Saata augmentoitu matriisi redusoituun porrasmuotoon ja esitä yhtälöryhmän ratkaisut muodossa

$$z\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

missä $z \in \mathbb{R}$ ja $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

Mallivastaus: Yhtälöryhmän kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ja augmentoitu matriisi

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Redusoitu porrasmuoto augmentoidulle matriisille saadaan seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Yhtälöryhmän ratkaisut ovat siis $(x, y, z) = z \cdot (0, 0, 0) + (-7, 19, 15)$