Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2024

Demonstraatio 2, 21.11.2024

Älä käytä tehtävissä tekoälyä vaan omaasi.

1. Määritellään lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seuraavasti:

$$T(x, y) = (8x - 2y, 15x - 3y).$$

Määritä lineaarikuvauksen matriisi A luonnollisen kannan $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ suhteen (sama kanta sekä lähtö- että kuva-avaruudessa) ja esitä lineaarikuvaus matriisikertolaskuna $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, missä $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat sarakevektoreita.

2. Valitaan avaruudelle $\mathbb{R}^2$ kanta $B = \{(1, 3), (2, 5)\}$. Selitä ensiksi (lyhyesti) miksi B todella on kanta ja etsi sitten edellisen tehtävän lineaarikuvauksen matriisi kannan B suhteen (sama kanta sekä lähtö- että kuva-avaruudessa).

3. Määritellään differenssioperaatio Δ reaalikertoimisten polynomien muodostamassa vektoriavaruudessa seuraavasti $\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x)$. Osoita, että Δ on lineaarinen ja laske $\Delta 1$ (vakiopolynomi 1), Δx, $\Delta x(x-1)$ ja $\Delta x(x-1)(x-2)$. Ohje lineaarisuutta varten: Osoita suoralla laskulla että $\Delta \alpha p = \alpha \Delta p$ ja että $\Delta(p_1 + p_2) = \Delta p_1 + \Delta p_2$.

4. Olkoon P_4 korkeintaan astetta 3 olevien reaalikertoimisten polynomien joukko ja sen kanta $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. Määritä kuvaukselle $\Delta : P_4 \to P_4$ (Δ tarkoittaa edellisen tehtävän differenssioperaatiota) matriisi kannan B suhteen (sama kanta alkukuvalle ja kuvalle). Ohje: Laske kantapolynomeille differenssit ja esitä nämä kannan B avulla.

5. Valitaan edellisen tehtävän avaruudelle P_4 kanta $C = \{1, x, x(x - 1), x(x - 1)(x - 2)\}$. Määritä kuvaukselle Δ matriisi kannan C suhteen. Ohje: Esitä kuvat kannan C avulla.

6. Olkoon V n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus ja $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ sen kanta. Tarkista, että kuvaus $f : V \to \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_B$ ($\boldsymbol{x}_B$ tarkoittaa vektorin $\boldsymbol{x}$ koordinaattivektoria kannan B suhteen) on lineaarinen ja että se on bijektio.

7. Olkoot B ja C tehtävissä 4 ja 5 esiintyneet kannat. Määritä kannanvaihdon $B \to C$ matriisi. Ohje: Etsi sellainen 4×4-matriisi, että $\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x}$, missä $\boldsymbol{x}$ on polynomin p koordinaattivektori (sarake) kannan B suhteen ja $\boldsymbol{y}$ saman polynomin koordinaattivektori (sarake) kannan C suhteen.

8. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Laske (käyttämättä ohjelmistoa tai laskinta) seuraavista ne, jotka on määritelty: AB, BA, B^2, $-2A$, $A + B$, $A^T A$.

9. Käytä luennolla esitettyä menetelmää (ei ohjelmistoa tai laskinta) käänteismatriisin etsimiseksi seuraaville matriiseille, mikäli olemassa: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ja $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tarkista matriisikertolaskulla ovatko saadut matriisit käänteismatriiseja.