

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2024

Demonstratio 3, 28.11.2024

Älä käytä tehtävissä tekoälyä, vaan omaasi. Ellei toisin mainita, tehtävät tulee tehdä käsin laskemalla.

1. Laske determinantit

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

ja

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 9 & -16 \\ 1 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix}.$$

2. Selitä ainakin yhdellä tavalla miksi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Yllä olevassa merkinnässä asteriskit * tarkoittavat mitä tahansa lukuja.

3. Määritä determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Ohje: Lisää aluksi 1. sarake toiseen luvulla $-a$ kerrottuna ja kolmanteen luvulla $-a^2$ kerrottuna.

4. Määritä determinantti

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 6 & -5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

5. Selvitä matriisiin

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Ohje: hyödynnä tehtävän 4 tulosta.

6. Etsi edellisen tehtävän matriisille similaari diagonaalimatriisi ja diagonaalisuuden välittävä matriisi P . Ohje: matriisien P ja D tulee toteuttaa $A = PDP^{-1}$.
7. Merkintä C^∞ tarkoittaa sellaisia koko reaaliakselilla määriteltyjä funktiota, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat olemassa. Osoita, että derivaattaoperaattori $D : C^\infty \rightarrow C^\infty$ on lineaarikuvaus ja etsi sen ominaisarvot ja -vektorit. Ohje: Ominaisarvoja varten pitää löytää sellaiset luvut λ , että on olemassa nollafunktiosta poikkeava $f(x)$, jolle pätee $Df(x) = \lambda f(x)$.

8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ja $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ matriisin A määrittämä lineaarikuvaus (\mathbf{x} esitetään sarakevektorina). Laske kuvat $f(\mathbf{i})$ ja $f(\mathbf{j})$, hahmottele näistä piirroskuva ja esitä kuvien perusteella arvaus kuvauksen f geometrisestä merkityksestä. Määritä lopuksi matriisin A ominaisarvot.

9. Olkoon $\theta \in [0, \pi]$. Määritä matriisin

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot. Millä parametrin θ arvolla ne voivat olla reaalisia?