Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra 2024

Älä käytä tehtävissä tekoälyä vaan omaasi. Laskut tulee suorittaa käsin, ellei toisin mainita.

Demonstraatio 5 12.12.2024

1. Olkoon $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2$, ja $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ jokin sisätulo.

   Sijoita vektoreiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ kantaesitykset sisätuloon $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ja esitä tämä kantavektoreiden sisätulojen $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$ avulla.

   Vertaa näin saatua lauseketta matriisituloon

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

   Mitä voit todeta matriisialkioista M_{ij}?

   Mallivastaus: Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ sisätulo on reaalinen, joten

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2, y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2) \\ &= x_1y_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) + x_1y_2(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) + x_2y_1(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) + x_2y_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)\end{aligned}$$

   Toisaalta

$$\begin{aligned}& (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} M_{11}y_1 + M_{12}y_2 \\ M_{21}y_1 + M_{22}y_2 \end{pmatrix} \\ = \;& x_1y_1M_{11} + x_1y_2M_{12} + x_2y_1M_{21} + x_2y_2M_{22}.\end{aligned}$$

   Jos siis valitaan matriisialkioiksi $M_{ij} = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$ saadaan sisätulolle esitys koordinaattivektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ avulla muodossa $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{y}$.

   Huomautus: Koska $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i)$, voidaan todeta että matriisi M on symmetrinen. Koska $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x}$, voidaan todeta myös että matrisiisi M on positiividefiniitti. Päättely osoittaa, että kaksiulotteisessa avaruudessa ei ole muunlaisia sisätuloja, kuin $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{y}$, missä $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat koordinaattivektoreita, ja M on positiividefiniitti matriisi. Samankaltainen päättely voidaan suorittaa kaikissa äärellisulotteisissa vektoriavaruuksissa.

2. Sopivalla sijoituksella $x_1 = \alpha x + \beta y$ ja $y_1 = \gamma x + \delta y$ voidaan *neliömuodosta* $ax^2 + bxy + cy^2$ eliminoida ”sekatermi” xy.

   Tarkastele tätä varten ensin miltä näyttää

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

   ja kirjoita sen jälkeen

$$3x^2 + 10xy + 3y^2$$

   muotoon (1). Etsi sitten kaavassa esiintyvän matriisin ominaisarvot ja -vektorit, similaarinen diagonaalimatriisi ja similarisuuden välittävä matriisi (voi laskea matematiikkaohjelmalla). Miten näistä selviää sijoitus, jossa ”sekatermi” xy häviää?

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} & (x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} \\ = \quad & ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2. \end{aligned}$$

Tämän perusteella

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriisin ominaisarvot löytyvät ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 8\}.$$

Ominaisarvoihin $\lambda = -2$ ja $\lambda = 8$ liittyvät ominaisvektorit löytyvät yhtälön $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ratkaisuista, sellaisiksi voidaan valita $(1, 1)^T$ ja $(1, -1)^T$, joten diagonaalisuuden välittäväksi matriisiksi voidaan valita esimerkiksi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Suoraan laskemalla

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

Tällöin sijoitus $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}_1$ tuottaa

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{x}_1)^T A P \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T P^T A P \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T P^{-1} A P \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1^T D \boldsymbol{x}_1,$$

missä $D = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ on diagonaalimatriisi eikä siis sekatermiä xy esiinny.

Todetaan tämä myös suoraan laskemalla: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ tuottaa muodon, jossa sekatermiä ei esiinny. Tällöin sijoitus tuottaa muodon $x = x_1 + y_1$ ja $y = x_1 - y_2$, jolloin

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 10xy + 5y^2 \\ = \quad & 3(x_1 + y_1)^2 + 10 \cdot (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + 3(x_1 - y_1)^2 \\ = \quad & 16x_1^2 - 4y_1^2 \end{aligned}$$

Huomautus: Tässä mallivastauksessa määritettiin $P^T AP$, kun taas diagonalisointiprosessissa diagonaalimatriisi saadaan muodossa $P^{-1}AP$. Nyt kuitenkin huomattiin, että $P^T P = 2I$, joten valitsemalla $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}P$ huomataan, että $P_1^T P_1 = I$ ja tällöin matriisi P_1 välittäisi diagonaalimuodon, jossa diagonaalialkiot ovat matriisin A ominaisarvot.

3. Olkoon $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ sisätulon indusoima normi. Osoita, että tällöin

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = 2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2. \tag{2}$$

Selitä miksi yhtälöä (2) kutsutaan *suunnikassäännöksi*.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\
&+ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\
&= 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = 2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2 .
\end{aligned}$$

Yhtälö merkitsee geometrisesti sitä, että suunnikkaan sivujen neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa.

4. Osoita, että $\mathbb{R}^2$:ssa määritelty normi $||(x,y)|| = |x| + |y|$ ei aina toteuta suunnikassääntöä.

   Mallivastaus: Valitaan esimerkiksi $\boldsymbol{x} = (1,0)$ ja $\boldsymbol{y} = (0,1)$. Tällöin $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = ||(1,1)||^2 + ||(1,-1)||^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Toisaalta $2\,||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,||\boldsymbol{y}||^2 = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 4$, joten suunnikassääntö ei toteudu. Tämän vuoksi tämä normi ei voi olla minkään sisätulon indusoima.

5. Olkoon $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta (miksi se on kanta?). Onko mahdollista "julistaa" tämä kanta ortonormaaliksi määrittelemällä sisätulo, jossa $((1,0,0),(1,0,0)) = 1$, $((1,0,0),(1,1,0)) = ((1,0,0),(1,1,1)) = 0$, $((1,1,0),(1,1,0)) = 1$, $((1,1,0),(1,1,1)) = 0$ ja $((1,1,1),(1,1,1)) = 1$? Jos tämä on mahdollista, selvitä mitä on $((3,2,1),(2,2,1))$.

   Mallivastaus: Vektorijoukko on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta, koska siinä on kolme vektoria, ja nämä ovat lineaarisesti riippumattomat. Luentoesimerkissä on osoitettu, että vektorijoukko, jossa seuraavassa vektorissa on enemmän alkunollia kuin edellisissä (eikä ole nollavektoria), on lineaarisesti riippumaton. Sama päättely voidaan suorittaa vektorijoukolle, jossa seuraavassa vektorissa on enemmän loppunollia kuin edellisissä, ja vektoreiden järjestys joukossa on vapaasti valittavissa.

   Kysytty sisätulo on mahdollista määritellä: Jos $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ on mikä hyvänsä kanta, voidaan määritellä sisätulo $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = 1$, jos $i = j$ ja 0, jos $i \neq j$. Tämä sisätulo voidaan laajentaa kaikille vektoreille kantaesityksen ja sisätulon lineaarisuuden perusteella.

   Tässä tehtävässä (esitykset voidaan löytää Gaussin-Jordanin algoritmilla)

$$(3,2,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(1,1,0) + 1\cdot(1,1,1)$$

   ja

$$(2,2,1) = 0\cdot(1,0,0) + 1\cdot(1,1,0) + 1\cdot(1,1,1)$$

   Tehtävässä määritelty sisätulo saadaan siis koordinaattivektoreiden pistetulona:

$$((3,2,1),(2,2,1)) = (1,1,1)\cdot(0,1,1) = 2.$$

6. Välillä $[\alpha, \alpha+T]$ määritellyille kompleksiarvoisille tietyt ehdot toteuttaville funktiolle määritellään sisätulo ehdolla

$$(f,g) = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

   Mikä on funktioiden $e^{\frac{2\pi i n}{T}x}$ ja $e^{\frac{2\pi i m}{T}x}$ etäisyys edellä määritellyn sisätulon indusoiman metriikan suhteen? Vihje: Integrointiin liittyvät laskut on esitetty luennolla ja niihin voi vedota.

Mallivastaus:
$$d(e^{\frac{2\pi in}{T}x}, e^{\frac{2\pi im}{T}x}) = \left|\left|e^{\frac{2\pi in}{T}x} - e^{\frac{2\pi im}{T}x}\right|\right|.$$

Jos $n = m$, on normi ja kysytty etäisyys selvästi 0. Olkoon sitten $n \neq m$. Tällöin

$$\begin{aligned}
& \left|\left|e^{\frac{2\pi in}{T}x} - e^{\frac{2\pi im}{T}x}\right|\right|^2 = (e^{\frac{2\pi in}{T}x} - e^{\frac{2\pi im}{T}x}, e^{\frac{2\pi in}{T}x} - e^{\frac{2\pi im}{T}x}) \\
= \;& (e^{\frac{2\pi in}{T}x}, e^{\frac{2\pi in}{T}x}) - (e^{\frac{2\pi in}{T}x}, e^{\frac{2\pi im}{T}x}) - (e^{\frac{2\pi im}{T}x}, e^{\frac{2\pi in}{T}x}) + (e^{\frac{2\pi im}{T}x}, e^{\frac{2\pi im}{T}x}) \\
= \;& T + T,
\end{aligned}$$

joten kysytty etäisyys on $\sqrt{2T}$.

7. Totea laskemalla että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko $B = \{(2,0,-1),(1,-1,2),(1,5,2)\}$ on ortogonaali tavallisen pistetulon suhteen ja etsi vektorille $(4,3,11)$ esitys joukon B vektoreiden lineaarikombinaationa.

   Mallivastaus; $(2,0,-1)\cdot(1,-1,2) = 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = 0$, $(2,0,-1)\cdot(1,5,2) = 2\cdot1+0\cdot5+(-1)\cdot2 = 0$, ja $(1,-1,2)\cdot(1,5,2) = 1\cdot1+(-1)\cdot5+2\cdot2 = 0$. Näiden laskujen perusteella vektorijoukko on ortogonaali.

   Koska $(2,0,-1)\cdot(2,0,-1) = 5$, $(1,-1,2)\cdot(1,-1,2) = 6$ ja $(1,5,2)\cdot(1,5,2) = 30$, saadaan vektorin

$$(4,3,11) = x_1(2,0,-1) + x_2(1,-1,2) + x_3(1,5,2) \tag{3}$$

   Koordinaatti x_1 saadaan laskemalla yhtälössä (3) puolittain pistetulo vektorin $(2,0,-1)$ kanssa:

$$(4,3,11)\cdot(2,0,-1) = x_1(2,0,-1)\cdot(2,0,-1) \Leftrightarrow -3 = 5x_1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{5}.$$

   Koordinaatti x_2 saadaan laskemalla yhtälössä (3) puolittain pistetulo vektorin $(1,-1,2)$ kanssa:

$$(4,3,11)\cdot(1,-1,2) = x_2(1,-1,2)\cdot(1,-1,2) \Leftrightarrow 23 = 6x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{23}{6}.$$

   Koordinaatti x_3 saadaan laskemalla yhtälössä (3) puolittain pistetulo vektorin $(1,5,2)$ kanssa:

$$(4,3,11)\cdot(1,5,2) = x_3(1,5,2)\cdot(1,5,2) \Leftrightarrow 41 = 30x_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{41}{30}.$$

   Näin ollen

$$(4,3,11) = -\frac{3}{5}\cdot(2,0,-1) + \frac{23}{6}(1,-1,2) + \frac{41}{30}(1,5,2).$$

8. Totea että vektorijoukko $B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ on lineaarisesti riippumaton. Käytä luennolla esitettyä Gramin-Schmidtin menetelmää ja esitä jokin jokin ortogonaali (tavallisen pistetulon suhteen) vektorijoukko B_2, joka generoi saman aliavaruuden kuin B_1. Etsi myös vektorin $(1,3,-2)$ esitys kannassa B_2.

   Mallivastaus: Vektorit eivät ole toistensa skalaarimonikertoja, koska esim. ensimmäisen vektorin viimeinen koordinaatti on 0, mutta toisen 1. Siksi ne ovat riippumattomat.

   Gramin-Schmidtin menetelmässä valitaan $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 = (1,1,0)$ ja $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}_1}{||\boldsymbol{y}_1||^2}\boldsymbol{y}_1 = (1,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{||(1,1,0)||^2}(1,1,0) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$.

Ortogonaaliksi, aliavaruuden generoivaksi joukoksi voidaan siis valita esim. $\{(1,1,0), \frac{1}{2}(1,-1,2)\}$ tai yhtä hyvin $B_2 = \{(1,1,0),(1,-1,2)\}$, jossa jälkimmäinen vektori on kerrottu skalaarilla 2.

Vektorin $(1,3,-2)$ esitys tässä kannassa saadaan laskemalla esityksestä

$$(1,3,-2) = x_1(1,1,0) + x_2(1,-1,2) \tag{4}$$

pistetulot kanta-alkioiden kanssa molemmin puolin, jolloin ensin

$$(1,3,-2)\cdot(1,1,0) = x_1(1,1,0)\cdot(1,1,0) \Leftrightarrow 4 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = 2,$$

Kerroin x_2 saadaan pistetulosta

$$(1,3,-2)\cdot(1,-1,2) = x_2(1,-1,2)\cdot(1,-1,2) \Leftrightarrow -6 = 6x_2 \Leftrightarrow x_2 = -1,$$

joten $(1,3,-2) = 2(1,1,0) - (1,-1,2)$.

9. Olkoot $\boldsymbol{x} = (2,3,7,1,2,8,9,2)$ ja $\boldsymbol{y} = (6,7,5,1,3,6,2,6)$. Laske matematiikkaohjelmalla (tai muulla tavalla) koordinaattien keskiarvot $\mu_{\boldsymbol{x}}$ ja $\mu_{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \mu_{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}$, $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{y}}\mathbf{1}$ sekä vektoreisen $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ välisen kulman kosini. Merkintä $\mathbf{1}$ tarkoittaa vektoria $(1,1,1,1,1,1,1,1)$.

   Mallivastaus: $\mu_{\boldsymbol{x}} = \frac{17}{4}$ ja $\mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{9}{2}$, $\boldsymbol{x}' = \frac{1}{4}(-9,-5,11,-13,-9,15,19,-9)$, $\boldsymbol{y}' = \frac{1}{2}(3,5,1,-7,-3,3,-5,3)$. Suoraan laskemalla $\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}' = 0$, joten tämän perusteella kysytty kosini $= 0$.