Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Vektorikäsitteen lähtökohtia

- Suuntajanat
- Vektoreiden yhteenlasku
- Vastavektori
- Suuntajanojen komponenttiesitys
- Skalaarikertolasku

Vektoriavaruus (äärellisulotteinen prototyyppi)

- Vektoreiden joukko $\mathbb{R}^n$, skalaarikunta $\mathbb{R}$
- $c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n)$,
- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- Yleistys: $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$, missä $\mathbb{K}$ on jokin muu kunta.

Huomautus

Insinöörimatematiikan kursseilla vektoreita esitetään yleensä lihavoidulla merkinnällä, esim $\boldsymbol{a}$. Fysiikan kursseilla on tapana merkitä ylänuoli $\overrightarrow{a}$ tai yläviiva $\overline{a}$ ja varsinkin yksikkövektoreille käytetään hattumerkintää $\hat{a}$. Vanhemmassa kirjallisuudessa käytetään fraktuurakirjasinta $\mathfrak{a}$. Taululle (ja piirtopöydälle) kirjoitettuna lihavoinnin $\boldsymbol{a}$ sijasta käytetään yleensä alaviivaa $\underline{a}$.

Vektoriavaruus

Algebralliset ominaisuudet

Vektoreiden joukko on ns. kommutatiivinen ryhmä:

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
- $(\exists \mathbf{0})(\forall \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u})$
- $(\forall \boldsymbol{u})(\exists -\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0})$
- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

Skalaarikertolasku toteuttaa:

- $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
- $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
- $(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$
- $a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$

Vektoriavaruuden rakenne

Määritelmä

Vektoreiden $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$ *lineaarikombinaatio* on muotoa

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

oleva lauseke, missä $c_1, \ldots\ c_n$ ovat skalaarikunnan $\mathbb{K}$ alkioita. Kaikkien vektorijoukosta $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ muodostettujen lineaarikombinaatioiden joukosta käytetään merkintää

$$L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \quad \text{tai} \quad \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$$

Lause

Joukko $L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ on suljettu skalaarikertolaskun ja vektoriyhteenlaskun suhteen (aliavaruus).

Vektoriavaruuden rakenne

Määritelmä

Vektoriavaruus V on äärellisesti generoitu, jos on olemassa sellainen äärellinen joukko G, että $V = \langle G \rangle$.

Esimerkki

Avaruudella $\mathbb{R}^n$ (samoin kuin avaruudella $\mathbb{C}^n$) on generoiva joukko

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

koska jokainen $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ = \; & (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ = \; & x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ = \; & x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

Vektoriavaruuden rakenne

Huomautus

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ merkitään yleensä $\boldsymbol{i} = (1, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1)$.

Huomautus

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ merkitään yleensä $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ ja $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

Vektoriavaruuden rakenne

Esimerkki

Joukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

Esimerkki

Joukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = (x - y)\boldsymbol{i} + y(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

Esimerkki

Joukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 0 \cdot (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on lineaarisesti riippuva, jos jokin joukon vektoreista $\boldsymbol{x}_i$ voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa:

$$\boldsymbol{x}_i = c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{c}_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

Vastakohta: Lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorijoukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ on lineaarisesti riippumaton: Ei ole mahdollista esitää vektoria $\boldsymbol{i}$ muodossa $\boldsymbol{i} = c\boldsymbol{j}$, $\Leftrightarrow (1, 0) = c(0, 1)$.

Lineaarinen riippuvuus

Esimerkki

Avaruuden vektorijoukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$ on lineaarisesti riippuva:

$$\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} = 1 \cdot \boldsymbol{i} + 1 \cdot \boldsymbol{j}.$$

Lause

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton tarkalleen silloin kun yhtälöllä

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

on ainoastaan ilmeinen eli triviaali ratkaisu $c_1 = \ldots = c_n = 0$.