Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Esimerkki

Matriisia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & & = & -3 \\ & & & x_4 & = & -1 \end{cases},$$

josta $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3 + 4, x_3 - 3, x_3, -1) =$
$(-2x_3, x_3, x_3, 0) + (4, -3, 0, -1) = x_3(-2, 1, 1, 0) + (4, -3, 0, -1).$

Ratkaisujoukon esittäminen

Huomautus

"portaan aloittavat" muuttujat esitetään muiden avulla, muut jäävät esitykseen.

Esimerkki

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & -4x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ & x_2 & & +3x_4 & & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 7 \end{array}\right.$$

Ratkaisut:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = & \; (4x_4 + 6x_5 - 2, -3x_4 + 3, -x_4 - 2x_5 + 7, x_4, x_5) \\ = & \; (4x_4 + 6x_5, -3x_4, -x_4 - 2x_5, x_4, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \\ = & \; (4x_4, -3x_4, -x_4, x_4, 0) + (6x_5, 0, -2x_5, 0, x_5) + (-2, 3, 7, 0, 0) \\ = & \; x_4(4, -3, -1, 1, 0) + x_5(6, 0, -2, 0, 1) + (-2, 3, 7, 0, 0), \end{aligned}$$

Lause

Jos A on lineaarisen yhtälöryhmän $m \times n$-matriisi (ei augmentoitu), ja sen porrasmuodossa on r porrasta (nollasta eroavaa riviä), voidaan ryhmän ratkaisut esittää muodossa $\boldsymbol{x} = x_{r+1}\boldsymbol{c}_{r+1} + \ldots + x_n\boldsymbol{c}_n + \boldsymbol{c}$, missä $\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita ja $x_i \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Matriisista A saatavan (redusoidun) porrasmatriisin nollasta eroavien rivien lukumäärää sanotaan matriisin asteeksi (rank) ja merkitään $r(A)$.

Lause

- $r(A)$ on matriisin rivien generoiman vektoriavaruuden dimensio.
- $r(A)$ on matriisin sarakkeiden generoiman vektoriavaruuden dimensio.

Ratkaisujoukon esittäminen

Esimerkki

Onko joukko
$B = \{(1,-1,2,-3),(-2,2,1,2),(-4,4,7,0),(-3,3,-1,5)\}$
lineaarisesti riippumaton ?

$$
\begin{aligned}
& c_1(1,-1,2,-3) + c_2(-2,2,1,2) \\
+ \quad & c_3(-4,4,7,0) + c_4(-3,3,-1,5) = (0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcl}
c_1 & -2c_2 & -4c_3 & -3c_4 & = & 0 \\
-c_1 & +2c_2 & +4c_3 & +3c_4 & = & 0 \\
2c_1 & +c_2 & +7c_3 & -c_4 & = & 0 \\
-3c_1 & +2c_2 & & +5c_4 & = & 0
\end{array} \right.
$$

Ratkaisujoukon esittäminen

Kerroinmatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vastaa yhtälöryhmää

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} c_1 & & +2c_3 & -c_4 & = & 0 \\ & c_2 & +3c_3 & +c_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} (c_1, c_2, c_3, c_4) &= (-2c_3 + c_4, -3c_3 - c_4, c_3, c_4) \\ &= c_3(-2, -3, 1, 0) + c_4(1, -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Matriisit

Määritelmä

$m \times n$ matriisi on kaavio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

jossa on m riviä ja n saraketta. Jos matriisin alkiot ovat reaalilukuja (kunnan $\mathbb{K}$), sanotaan että matriisi on yli reaalilukujen (yli kunnan $\mathbb{K}$)

Matriisit

Määritelmä

Rivivektori (vaakavektori) on $1 \times n$ matriisi $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$.
Sarakevektori (pystyvektori) on $m \times 1$ matriisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Skalaarikertolasku

Jos A on $m \times n$-matriisi ja c joko kompleksi- tai reaaliluku, on cA $m \times n$-matriisi, jolle pätee $(cA)_{ij} = cA_{ij}$ (kertolasku alkioittain).

Matriisien yhteenlasku

Jos A on $m \times n$-matriisi ja B $r \times s$-matriisi, summa $A + B$ määritellään vain jos $m = r$ ja $n = s$. Tällöin

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Huomautus

$m \times n$-matriisit muodostavat vektoriavaruuden yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun suhteen.

Matriisit

Esimerkki

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi, $5A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

Esimerkki

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3×2-matriisi. Summaa $A + B$ ei ole määritelty.

Esimerkki

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi ja $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on 2×3-matriisi.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriisit

Määritelmä

- *Nollamatriisi* O on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia
- *Neliömatriisi* on matriisi, jossa rivien määrä on sama kuin sarakkeiden määrä
- *Diagonaalimatriisi* on neliömatriisi D, jolle pätee $i \neq j \Rightarrow D_{ij} = 0$.
- *Identiteettimatriisi* I_n on diagonaalimatriisi, jonka kaikki *diagonaalialkiot* ovat ykkösiä.

Määritelmä

- *Transpoosi* $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.
- Neliömatriisi A on *symmetrinen*, jos $A^T = A$.
- Matriisin A:n *vastamatriisi* $-A$ määritellään asettamalla $(-A)_{ij} = -A_{ij}$.

Määritelmä

Olkoot U ja V vektoriavaruuksia yli kunnan $\mathbb{K}$. Funktio $f : U \to V$ on *lineaarinen*, jos

$$f(a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2) = a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + a_2 f(\boldsymbol{u}_2).$$

Induktiolla:

$$f(a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{u}_n) = a_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \ldots + a_n f(\boldsymbol{u}_n)$$

Matriisiesitys

Valitaan avaruudelle U (dim. n) kanta $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ ja avaruudelle V (dim. m) kanta $C = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$.
Tällöin vektorin $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$ kuva saadaan muodossa

$$f(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{b}_n)$$

Koska C on avaruuden V kanta, voidaan jokainen $f(\boldsymbol{b}_i)$ esittää muodossa

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{i1}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{im}\boldsymbol{c}_m$$

Matriisiesitys

$$f(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = x_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{b}_n)$$

Koska C on avaruuden V kanta, voidaan jokainen $f(\boldsymbol{b}_i)$ esittää muodossa

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{i1}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{im}\boldsymbol{c}_m$$

Yhdistämällä:

$$\begin{aligned} & f(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) \\ = \quad & x_1(a_{11}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{m1}\boldsymbol{c}_m) \\ + \quad & \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{mn}\boldsymbol{c}_m) \\ = \quad & (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{c}_1 \\ + \quad & \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)\boldsymbol{c}_m \end{aligned}$$

Matriisit

Määritelmä

Jos $f : U \to V$ on lineaarikuvaus B ja C avaruuksien U ja V kannat, sekä

$$f(\boldsymbol{b}_i) = a_{i1}\boldsymbol{c}_1 + \ldots + a_{im}\boldsymbol{c}_m,$$

sanotaan, että matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on lineaarikuvauksen f *matriisi* kantojen B ja C suhteen.

Matriisikertolasku

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{pmatrix}
$$

Huomautus

Olkoon A lineaarikuvauksen $f : U \to V$ matriisi kantojen B ja C suhteen. Jos $\boldsymbol{x}$ on alkukuvan koordinaattivektori, saadaan kuvan koordinaattivektori matriisikertolaskulla $A\boldsymbol{x}$.

Matriisitulo

Määritelmä

Olkoon A $m \times n$-matriisi ja B $n \times k$-matriisi. Matriisitulo AB voidaan määritellä seuraavasti: Esitetään B $n \times 1$ sarakkeina: $B = (\boldsymbol{b}_1 \dots \boldsymbol{b}_k)$, jolloin

$$AB = (A\boldsymbol{b}_1 \dots A\boldsymbol{b}_k).$$

Symmetrinen esitys

Jos A on $m \times n$-matriisi ja B on $n \times k$-matriisi, on

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lj}$$

Matriisitulo

Esimerkki

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

ei ole määritelty

Esimerkki

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

on määritelty.

Huomautus

Matriisitulo voidaan laskea lohkomuodossa

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

mikäli lohkojen tyypit sopivat yhteen.

Matriisitulo

Lause

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $a(AB) = (aA)B = A(aB)$
- $AO = OA = O$
- $AI = IA = A,$
- $(AB)^T = B^T A^T,$

edellyttäen että vasemmat puolet ovat määriteltyjä.

Matriisitulo

Esimerkki

Matriisikertolasku

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z - w \\ x + 3y + 2z + 2w \\ 2x - 2y + w \end{pmatrix}$$

Määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, jossa koordinaattivektori $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ kuvautuu koordinaattivektoriksi $(2x + z - w, x + 3y23z + 2w, 2x - 2y + w) \in \mathbb{R}^3$.