Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Determinantti

Määritelmä

Olkoon $\mathbb{K}$ skalaarikunta (yleensä joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) ja $D : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ multilineaarinen, alternoiva kuvaus, jolle pätee

$$D(\boldsymbol{e}_1^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n^T) = 1.$$

Neliömatriisin $A = (\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ ($\boldsymbol{a}_i$ sarakkeita) determinantti $\det(A)$ määritellään

$$\det(A) = D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

Determinantista käytetään myös merkintää $|A|$. Tässä merkinnässä jätetään pois matriisin A vasen ja oikea kaarisulje.

Determinantti

Ominaisuuksia

- $D(\ldots, \mathbf{0}, \ldots) = 0$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots) = -D(\ldots, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots)$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots) = 0$
- $D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y} + a\boldsymbol{x}, \ldots) = D(\ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{y}, \ldots)$

Determinantti

Summalauseke

Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Tällöin

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1j_1} A_{2j_2} \dots A_{nj_n}.$$

Esimerkki

Permutaatioiden $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$ ja $(3, 1, 2)$ ja $(3, 2, 1)$ merkit ovat $+1$, -1, -1, $+1$, $+1$ ja -1. Täten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

koostuu tulojen $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ ja $a_{13}a_{22}a_{31}$ summasta oikeilla merkeillä varustettuna. Täten kyseinen determinantti on

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Determinantti

Geometrinen tulkinta

Kun $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ (sarakkeet), determinantin itseisarvo $|\det(A)|$ merkitsee vektoreiden $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ määrittämän särmiön tilavuutta

Multiplikatiivisuus

Jos A ja B ovat $n \times n$-matriiseja, on

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Johtuu multilineaarisen kuvauksen yksikäsitteisyydestä

Huomautus

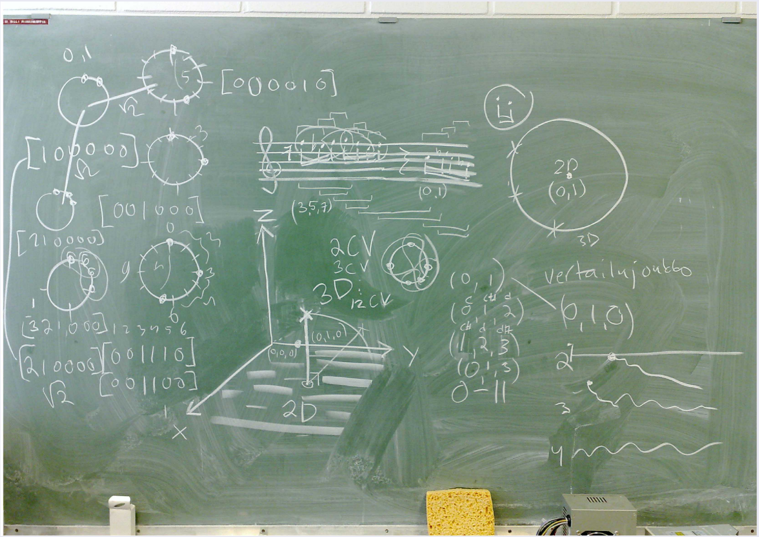
Jos A on säännöllinen, on $AA^{-1} = I$ ja siksi

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1.$$

Näin ollen $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Determinantti

Comparison Structure Analysis



Määritelmä

Matriisin A *alimatriisi* määritellään pyyhkimällä jokin rivi ja sarake pois.

Esimerkki

Matriisista

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

saadaan toinen rivi ja kolmas sarake pyyhkimällä alimatriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Determinantti

Rivikehitelmät

Olkoon $A[i,j]$ alimatriisi joka saadaan pyyhimällä pois matriisin A rivi i ja sarake j ja $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A[i,j])$. Lukua C_{ij} kutsutaan alkion A_{ij} *komplementiksi*. Tällöin

$$A_{i1}C_{j1} + A_{i2}C_{j2} + \ldots + A_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A), & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases}$$

Determinantti

Rivikehitelmien matriisimuoto

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I$$

Determinantti

Rivikehitelmät

3-rivinen determinantti voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Sääntö: Alkion a alideterminantti saadaan poistamalla rivi ja sarake, jolle a kuuluu. Merkkisääntö: vasen ylänurkka $+1$, sitten vuorotellen.

Determinantti

4-rivinen determinantti

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

$$+c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Determinantti

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\
= \ 1 \cdot 10 - 3 \cdot 3 = 1.
\end{aligned}
$$

Determinantti

Lause

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Lause

Neliömatriisille A seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:

- $\det(A) \neq 0$
- A^{-1} on olemassa
- A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat
- A:n rivit ovat lineaarisesti riippumattomat
- $r(a) = n$.
- A:n redusoitu porrasmuoto on I.

Determinantti

Yhteenveto

Merkitään $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ (sarake-esitys)

- $\det(\dots, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \dots) = \det(\dots, \boldsymbol{a}, \dots) + \det(\dots, \boldsymbol{b}, \dots)$
- $\det(\dots, \alpha\boldsymbol{a}, \dots) = \alpha \det(\dots, \boldsymbol{a}, \dots)$
- $\det(\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots) = -\det(\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots)$
- $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$, jos jokin $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$
- $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ jos $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ joillekin $i \neq j$.
- $\det(\dots \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots) = \det(\dots \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j + \alpha\boldsymbol{a}_i \dots)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) A_{1j_1} A_{2j_2} \dots A_{nj_n}$
- $A_{i1}C_{j1} + A_{i2}C_{j2} + \dots + A_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A), & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases}$, missä $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A[i,j])$ on matriisialkion A_{ij} komplementti.

Determinantti

Yhteenveto

- $\det(A^T) = \det(A)$
- Sarakkeita koskevat ominaisuudet pätevät myös riveille.
- Jos $B \sim A$, niin $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$
- $\det(A) \neq 0$ tarkalleen silloin kun A:n sarakkeet (tai rivit) ovat lineaarisesti riippumattomat.
- $\det(A) \neq 0$ tarkalleen silloin kun A^{-1} on olemassa.
- $|\det(A)|$ on suuntaissärmiön $\{t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + t_n\boldsymbol{a}_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$ tilavuus

Lause

Homogeenisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} A_{11}x_1 & +A_{12}x_2 & +\dots & +A_{1n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & = & 0 \\ A_{n1}x_1 & +A_{n2}x_2 & +\dots & +A_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

on *epätriviaali* ratkaisu ($(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$) tarkalleen silloin kun kerroinmatriisin determinantti on $= 0$.

Jos $\det(A) \neq 0$, on A^{-1} olemassa ja tällöin $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Päättelyn toinen suunta on hieman vaativampi.

Ominaisarvot ja -vektorit

Matriisitulo

- $n \times n$-matriisien A ja B tulo on yleensä työläs laskea:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

- n^2 alkiota, n yhteenlaskua ja $n-1$ kertolaskua kutakin kohti $\Rightarrow O(n^3)$ operaatiota kun $n \to \infty$.
- $O(n^{2.37\cdots})$ operaatiota paras tunnettu menetelmä

Matriisitulo

- Diagonaalimatriiseille helppo:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Matriisitulo

- Markovin ketjut: $\boldsymbol{p}^{(t)} = M\boldsymbol{p}^{(t-1)}$.
- Yleistys: Diskreettiaikainen lineaarinen systeemi $\boldsymbol{x}^{(t)} = A\boldsymbol{x}^{(t-1)}$
- $\boldsymbol{x}^{(t)} = A\boldsymbol{x}^{(t-1)} = A \cdot A\boldsymbol{x}^{(t-2)} = A^2 \cdot A\boldsymbol{x}^{(t-3)} = \ldots$
- Seuraus: $\boldsymbol{x}^{(t)} = A^t\boldsymbol{x}^{(0)}$
- A^t voi olla työläs määrittää.

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin A ominaisarvo, jos on olemassa $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ siten, että

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Jokaista tämän yhtälön toteuttavaa vektoria $\boldsymbol{x}$ sanotaan ominaisarvoon λ kuuluvaksi ominaisvektoriksi.

Esimerkki

$$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x},$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä $\boldsymbol{x}$ siihen liiittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Yleistys

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \cdots & 0 \\ & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ovat siis diagonaalialkiot ja ominaisvektoreina toimivat luonnollisen kannan vektorit.

Ominaisarvot ja -vektorit

Geometrinen tulkinta

- Jokainen $n \times n$-matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.
- Jokainen matriisin A ominaisvektori $\boldsymbol{x}$ vastaa sellaista suuntaa, jossa A toimii "venyttävänä" tai "kutistavana" kuvauksena: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Huomautus

Jos A on $n \times n$-matriisi, on $\det(A - \lambda I)$ astetta n oleva λ:n polynomi.