Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Ominaisarvot ja -vektorit

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin A ominaisarvo, jos on olemassa $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ siten, että

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Jokaista tämän yhtälön toteuttavaa vektoria $\boldsymbol{x}$ sanotaan ominaisarvoon λ kuuluvaksi ominaisvektoriksi.

Ominaisarvot ja -vektorit

Esimerkki

$$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x},$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä $\boldsymbol{x}$ siihen liiittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x},$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä $\boldsymbol{x}$ siihen liiittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Esimerkki

$$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x},$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä $\boldsymbol{x}$ siihen liiittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Yleistys

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \cdots & 0 \\ & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yleistys

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ovat siis diagonaalialkiot ja ominaisvektoreina toimivat luonnollisen kannan vektorit.

Ominaisarvot ja -vektorit

Geometrinen tulkinta

- Jokainen $n \times n$-matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.

Ominaisarvot ja -vektorit

Geometrinen tulkinta

- Jokainen $n \times n$-matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.
- Jokainen matriisin A ominaisvektori $\boldsymbol{x}$ vastaa sellaista suuntaa, jossa A toimii "venyttävänä" tai "kutistavana" kuvauksena: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$$

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ oltava ratkaisu $\mathbf{x} \neq 0$.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatimus: Yhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ oltava ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq 0$.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ratkaisu $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Huomautus

Jos A on $n \times n$-matriisi, on $\det(A - \lambda I)$ astetta n oleva λ:n polynomi.

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Ominaisvektorien määrittäminen

Jos ominaisarvo λ on tunnettu, voidaan siihen kuuluvat ominaisvektorit $\boldsymbol{x}$ määrittää yhtälöstä

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Gaussin-Jordanin menetelmällä.

Ominaisvektorien määrittäminen

Jos ominaisarvo λ on tunnettu, voidaan siihen kuuluvat ominaisvektorit $\boldsymbol{x}$ määrittää yhtälöstä

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Gaussin-Jordanin menetelmällä.

Esimerkki

Aiempien esimerkkien matriisien ominaisvektorit?

Ominaisarvot ja -vektorit

Lause

Olkoon V $n \times n$-matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Lause

Olkoon V $n \times n$-matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.

Lause

Olkoon V $n \times n$-matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.
Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$-yhtälöryhmänä.

Ominaisarvot ja -vektorit

Lause

Olkoon V $n \times n$-matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.
Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$-yhtälöryhmänä. Ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä ja ne muodostavat $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:n) aliavaruuden.

Ominaisarvot ja -vektorit

Seuraus 1

Jos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, on $A^i\boldsymbol{x} = \lambda^i\boldsymbol{x}$.

Seuraus 1

Jos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, on $A^i\boldsymbol{x} = \lambda^i\boldsymbol{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.

Ominaisarvot ja -vektorit

Seuraus 1

Jos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, on $A^i\boldsymbol{x} = \lambda^i\boldsymbol{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.
Jos

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n,$$

on

$$A\boldsymbol{x} = a_1A\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_nA\boldsymbol{x}_n$$

Seuraus 1

Jos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, on $A^i\boldsymbol{x} = \lambda^i\boldsymbol{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.
Jos

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n,$$

on

$$A\boldsymbol{x} = a_1A\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_nA\boldsymbol{x}_n = a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\lambda_n\boldsymbol{x}_n,$$

Seuraus 1

Jos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, on $A^i\boldsymbol{x} = \lambda^i\boldsymbol{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.
Jos

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n,$$

on

$$A\boldsymbol{x} = a_1A\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_nA\boldsymbol{x}_n = a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\lambda_n\boldsymbol{x}_n,$$

ja induktiolla

$$A^i\boldsymbol{x} = a_1\lambda_1^i\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\lambda_n^i\boldsymbol{x}_n.$$

Huomautus

Diagonaalimatriisien kertolasku on yksinkertaista:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n d_n \end{pmatrix}.$$

Huomautus

Diagonaalimatriisien kertolasku on yksinkertaista:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n d_n \end{pmatrix}.$$

Täten myös diagonaalimatriisin potenssiinkorotus on helppoa.

Diagonalisointi

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$.

Diagonalisointi

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PD^n P^{-1}.$$

Määritelmä

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P, että $A = PBP^{-1}$.

Diagonalisointi

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Määritelmä

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P, että $A = PBP^{-1}$. Merkitään $A \sim B$

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Määritelmä

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P, että $A = PBP^{-1}$. Merkitään $A \sim B$

Lause

1) $A \sim A$.

Diagonalisointi

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Määritelmä

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P, että $A = PBP^{-1}$. Merkitään $A \sim B$

Lause

1) $A \sim A$. 2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D, että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Määritelmä

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P, että $A = PBP^{-1}$. Merkitään $A \sim B$

Lause

1) $A \sim A$. 2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. 3) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP)$

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1})\det(P)$

Diagonalisointi

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1})\det(P) = \det(A)\det(P^{-1}P) = \det(A)\det(I)$

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1})\det(P) = \det(A)\det(P^{-1}P) = \det(A)\det(I) = \det(A)$.

Diagonalisointi

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1})\det(P) = \det(A)\det(P^{-1}P) = \det(A)\det(I) = \det(A)$.
Jos $A = P^{-1}BP$, on $A - \lambda I = P^{-1}(B - \lambda I)P$, joten $A - \lambda I$ ja $B - \lambda I$ ovat similaarit.

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1})\det(P) = \det(A)\det(P^{-1}P) = \det(A)\det(I) = \det(A)$.

Jos $A = P^{-1}BP$, on $A - \lambda I = P^{-1}(B - \lambda I)P$, joten $A - \lambda I$ ja $B - \lambda I$ ovat similaarit. Näin ollen näillä on sama determinantti ja siis sama ominaisarvoyhtälö.

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)\det(P^{-1})\det(P) = \det(A)\det(P^{-1}P) = \det(A)\det(I) = \det(A)$.
Jos $A = P^{-1}BP$, on $A - \lambda I = P^{-1}(B - \lambda I)P$, joten $A - \lambda I$ ja $B - \lambda I$ ovat similaarit. Näin ollen näillä on sama determinantti ja siis sama ominaisarvoyhtälö. Similaarisilla matriiseilla on siis samat ominaisarvot.

Diagonalisointi

Vasemmalta kertominen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1 & a_{n2}d_2 & \cdots & a_{nn}d_n \end{pmatrix}.$$

Vasemmalta kertominen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1 & a_{n2}d_2 & \cdots & a_{nn}d_n \end{pmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin sarake i tulee siis kerrotuksi oikeanpuoleisen matriisin diagonaalialkiolla d_i.

Diagonalisointi

Idea

Oletetaan, että $n \times n$-matriisilla A on n ominaisarvoa $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ja näihin liittyvät ominais(pysty)vektorit $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Merkitään $P = (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n)$, jolloin

$$AP = (A\boldsymbol{x}_1 \ldots A\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ldots \lambda_n\boldsymbol{x}_n).$$

Diagonalisointi

Idea

$$AP = (A\boldsymbol{x}_1 \ldots A\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ldots \lambda_n\boldsymbol{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ldots \lambda_n\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} = PD,$$

Idea

$$AP = (A\boldsymbol{x}_1 \ldots A\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ldots \lambda_n\boldsymbol{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \ldots \lambda_n\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} = PD,$$

siis $AP = PD$.

Diagonalisointi

Idea

$$AP = (A\boldsymbol{x}_1 \dots A\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \dots \lambda_n\boldsymbol{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \dots \lambda_n\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} = PD,$$

siis $AP = PD$. Täten $A = PDP^{-1}$, jos P:llä on käänteismatriisi.

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

diagonaalinen "kumppani"?

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

Diagonalisointi

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

$$P^{-1} \text{ on olemassa}$$

Diagonalisointi

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

$$\begin{aligned} & P^{-1} \text{ on olemassa} \\ \Leftrightarrow \quad & \det(P) \neq 0 \end{aligned}$$

Diagonalisointi

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

$$\begin{aligned} & P^{-1} \text{ on olemassa} \\ \Leftrightarrow \quad & \det(P) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & P\text{:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat} \end{aligned}$$

Diagonalisointi

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

$$\begin{aligned} & P^{-1} \text{ on olemassa} \\ \Leftrightarrow \quad & \det(P) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & P\text{:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{Matriisin } A \text{ ominaisvektorit muodostavat } \mathbb{C}^n\text{:n kannan} \end{aligned}$$

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Ominaisarvoon 1 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$ ja ominaisarvoon 2 kuuluvat avaruuden $\langle (3,5,0)^T, (1,0,5)^T \rangle$.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Ominaisarvoon 1 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$ ja ominaisarvoon 2 kuuluvat avaruuden $\langle (3,5,0)^T, (1,0,5)^T \rangle$.

Matriisi $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ on kääntyvä

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Ominaisarvoon 1 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$ ja ominaisarvoon 2 kuuluvat avaruuden $\langle (3,5,0)^T, (1,0,5)^T \rangle$.

Matriisi $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ on kääntyvä ja

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1, 1, 1)^T \rangle$.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1, 1, 1)^T \rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisia P jonka sarakkeet olisivat A:n ominaisvektoreita.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisia P jonka sarakkeet olisivat A:n ominaisvektoreita.

Sanotaan, että matriisi A ei ole *diagonalisoituva*

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisia P jonka sarakkeet olisivat A:n ominaisvektoreita.

Sanotaan, että matriisi A ei ole *diagonalisoituva*

Lause

Erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit $\neq \mathbf{0}$ ovat lineaarisesti riippumattomat.