Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Diagonalisointi

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1, 1, 1)^T \rangle$.

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisia P jonka sarakkeet olisivat A:n ominaisvektoreita.

Diagonalisointi

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisia P jonka sarakkeet olisivat A:n ominaisvektoreita.

Sanotaan, että matriisi A ei ole *diagonalisoituva*

Diagonalisointi

Esimerkki

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1,1,1)^T \rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisia P jonka sarakkeet olisivat A:n ominaisvektoreita.

Sanotaan, että matriisi A ei ole *diagonalisoituva*

Lause

Erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit $\neq \mathbf{0}$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

Esimerkki

Onko mahdollista määritellä e^{tA} sillä tavoin, että

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}?$$

Esimerkki

Onko mahdollista määritellä e^{tA} sillä tavoin, että

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}?$$

Derivointi tarkoittaa derivointia matriisialkio kerrallaan

Esimerkki

Onko mahdollista määritellä e^{tA} sillä tavoin, että

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}?$$

Derivointi tarkoittaa derivointia matriisialkio kerrallaan

Esimerkki

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^{ta} & e^{tb} \\ e^{tc} & e^{td} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{ta} & be^{tb} \\ ce^{tc} & de^{td} \end{pmatrix}$$

Matriisien funktiot

Polynomifunktiot

Jos

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

Matriisien funktiot

Polynomifunktiot

Jos

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

voidaan määritellä

$$p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_n A^n.$$

Matriisien funktiot

Polynomifunktiot

Jos

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

voidaan määritellä

$$p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_n A^n.$$

Eksponenttifunktio

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

Matriisien funktiot

Polynomifunktiot

Jos

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

voidaan määritellä

$$p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_n A^n.$$

Eksponenttifunktio

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

Analogia:

Määritellään

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots$$

Esimerkki

Kun

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots,$$

Esimerkki

Kun
$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots,$$
on
$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \frac{1}{4!}4t^3A^4 + \ldots$$

Esimerkki

Kun

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots,$$

on

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \frac{1}{4!}4t^3A^4 + \dots \\ &= A(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots)\end{aligned}$$

Esimerkki

Kun

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots,$$

on

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \frac{1}{4!}4t^3A^4 + \dots \\ &= A(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots) \\ &= Ae^{tA}\end{aligned}$$

Matriisien funktiot

Eksponenttifunktion laskeminen

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Eksponenttifunktion laskeminen

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Jos

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

on diagonaalinen,

Eksponenttifunktion laskeminen

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Jos

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

on diagonaalinen, on

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Eksponenttifunktion laskeminen

ja siksi

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Eksponenttifunktion laskeminen

ja siksi

$$
\begin{aligned}
e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_n^k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eksponenttifunktion laskeminen

ja siksi

$$
\begin{aligned}
e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_n^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_k} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eksponenttifunktion laskeminen

Jos A ei ole diagonaalinen, mutta on similaarinen diagonaalimatriisin kanssa, $A = PDP^{-1}$, on

$$
\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots \\
&= PIP^{-1} + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}PD^2P^{-1} + \frac{1}{3!}PD^3P^{-1} + \ldots \\
&= P(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \ldots)P^{-1} \\
&= Pe^DP^{-1}.
\end{aligned}
$$

Matriisien funktiot

Esimerkki

e^{tA}, kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Matriisien funktiot

Esimerkki

e^{tA}, kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Yleisesti:

Jos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

on Taylorin sarjalla määritelty funktio ja $A = PDP^{-1}$ (D diagonaalinen),

Esimerkki

e^{tA}, kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Yleisesti:

Jos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

on Taylorin sarjalla määritelty funktio ja $A = PDP^{-1}$ (D diagonaalinen), voidaan määritellä

$$f(A) = Pf(D)P^{-1},$$

Matriisien funktiot

Esimerkki

e^{tA}, kun $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Yleisesti:

Jos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

on Taylorin sarjalla määritelty funktio ja $A = PDP^{-1}$ (D diagonaalinen), voidaan määritellä

$$f(A) = Pf(D)P^{-1},$$

missä $f(D)$ lasketaan jokaiselle diagonaalialkiolle erikseen.

Matriisien funktiot

Ongelma

Entä jos matriisi A ei ole diagonalisoituva?

Jordan-lohkot

Jordan-lohkot

Määritelmä

Ominaisarvoon λ liittyvä *Jordan*-lohko on

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordan-lohkot

Diagonaalimatriisin potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkot

Diagonaalimatriisin potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkojen potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkot

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkot

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Jordan-lohkot

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Huomautus

$n\lambda^{n-1} = \frac{d}{d\lambda}\lambda^n$, $\binom{n}{2}\lambda^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^n$,
$\binom{n}{3}\lambda^{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\lambda^{n-2} = \frac{1}{6}\frac{d^3}{d\lambda^3}\lambda^n$

Jordan-lohkot

Määritelmä

$$f\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Jordan-lohkot

Määritelmä

$$f\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Jordan-lohkot

Määritelmä

$$f\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)\\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda)\\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)\\ 0 & 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) & \frac{1}{6}f'''(\lambda)\\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda)\\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}$$

Jordan-lohkot

Lause

Olkoon A $n \times n$-matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (eivät välttämättä erisuuret). Tällöin on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että $P^{-1}AP$ voidaan esittää lohkomuodossa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}.$$

Matriisi P voidaan valita siten, että sen sarakkeet ovat matriisin A ominaisvektoreita tai *yleistettyjä* ominaisvektoreita.

Jordan-lohkot

Yleistetyt ominaisvektorit

Ominaisarvoon λ kuuluva matriisin A ominaisvektori toteuttaa yhtälön

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Jordan-lohkot

Yleistetyt ominaisvektorit

Ominaisarvoon λ kuuluva matriisin A ominaisvektori toteuttaa yhtälön

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoon λ kuuluva matriisin A kertaluvun k yleistetty ominaisvektori toteuttaa yhtälön

$$(A - \lambda I)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Jordan-lohkot

Yleistetyt ominaisvektorit

Jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$, on myös $(A - \lambda I)^{k+1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Jordan-lohkot

Yleistetyt ominaisvektorit

Jos $(A - \lambda I)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, on myös $(A - \lambda I)^{k+1} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Olkoon E_λ^k vektoriavaruus, joka koostuu matriisin A ominaisarvoon λ kuuluvista, kertaluvun k ominaisvektoreista.

Jordan-lohkot

Yleistetyt ominaisvektorit

Jos $(A - \lambda I)^k \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, on myös $(A - \lambda I)^{k+1} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Olkoon E_λ^k vektoriavaruus, joka koostuu matriisin A ominaisarvoon λ kuuluvista, kertaluvun k ominaisvektoreista.

Huomautus

Edellämainitun perusteella $E_\lambda^k \subseteq E_\lambda^{k+1}$.

Jordan-lohkot

Määritelmä

Ominaisarvoon λ kuuluvat yleistetyt ominaisvektorit $\boldsymbol{x}_k$ muodostavat *Jordanin ketjun*, jos $\boldsymbol{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\boldsymbol{x}_k$.

Jordan-lohkot

Määritelmä

Ominaisarvoon λ kuuluvat yleistetyt ominaisvektorit $\boldsymbol{x}_k$ muodostavat *Jordanin ketjun*, jos $\boldsymbol{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\boldsymbol{x}_k$.

Fakta

Jordanin normaalimuodon välittävän matriisin sarakkeet voidaan valita yleistettyjen ominaisvektoreiden joukosta siten että ne muodostavat Jordanin ketjun oikealta vasemmalle.

Jordan-lohkot

Esimerkki

Matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainoa ominaisarvo on 2 ja tähän liittyvä ominaisvektorien avaruus $(1,1)^T$.

Jordan-lohkot

Esimerkki

Matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainoa ominaisarvo on 2 ja tähän liittyvä ominaisvektorien avaruus $(1,1)^T$.
Jordanin normaalimuotoa varten etsitään toisen kertaluvun ominaisvektoreita, jotka ovat yhtälön

$$(A - \lambda I)^2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

ratkaisuja. Koska tässä tapauksessa $(A - \lambda I)^2 = 0$, kelpaa mikä tahansa vektori, esim. $(1,0)^T$ ylläolevan yhtälön ratkaisuksi.
Jordanin ketju voidaan muodostaa valitsemalla
$\boldsymbol{x}_2 = (A - \lambda I)(1,0)^T = (1,1)^T$.

Jordan-lohkot

Esimerkki

Näin ollen matriisi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on Jordanin normaalimuodon välittävä matriisi:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0$

Esimerkki

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Esimerkki

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Avaruus E_1^1:

$$(A - 1 \cdot I)\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 10 & -17 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Avaruus E_1^1:

$$(A - 1 \cdot I)\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 10 & -17 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0)$$

Esimerkki

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2:

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2:

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Esimerkki

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2:

$$(A - 1 \cdot I)^2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Avaruus E_1^3: $(A - 1 \cdot I)^3 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Esimerkki

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2:

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Avaruus E_1^3: $(A - 1 \cdot I)^3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Nyt $(A - 1 \cdot I)^3 = 0$, joten $E_1^3 = \mathbb{C}^3$

Esimerkki

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle(2,1,0)\rangle$, $E^2 = \langle(2,1,0),(-3,0,1)\rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

Esimerkki

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2,1,0) \rangle$, $E^2 = \langle (2,1,0), (-3,0,1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3-2=1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1,0,0)^T$

Esimerkki

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2,1,0) \rangle$, $E^2 = \langle (2,1,0), (-3,0,1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3 - 2 = 1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1,0,0)^T$
- Sitten valitaan $2 - 1 = 1$ vektoria avaruudesta $E^2 \setminus E^1$, joukkoon pitää valita $(A - I)(1,0,0)^T = (-5,-1,1)^T$.

Esimerkki

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2,1,0) \rangle$, $E^2 = \langle (2,1,0), (-3,0,1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3 - 2 = 1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1,0,0)^T$
- Sitten valitaan $2 - 1 = 1$ vektoria avaruudesta $E^2 \setminus E^1$, joukkoon pitää valita $(A - I)(1,0,0)^T = (-5,-1,1)^T$.
- Sitten valitaan 1 vektori avaruudesta E^1, joukkoon pitää valita $(A - I)(-5,-1,1)^T = (-2,-1,0)^T$.

Esimerkki

Matriisin P muodostaminen

- P:n sarakkeiksi valitaan ominaisvektorit aloittaen alimmasta kertaluvusta
- Sarake $\boldsymbol{x}_k$ sijoitetaan välittömästi sarakkeen $\boldsymbol{x}_{k+1}$ vasemmalle puolelle, jos $(A - \lambda I)\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k$

Esimerkki

Matriisin P muodostaminen

- P:n sarakkeiksi valitaan ominaisvektorit aloittaen alimmasta kertaluvusta
- Sarake $\boldsymbol{x}_k$ sijoitetaan välittömästi sarakkeen $\boldsymbol{x}_{k+1}$ vasemmalle puolelle, jos $(A - \lambda I)\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jolloin

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

Matriisien eksponenttifunktio

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} t^n\lambda^n & nt^n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)t^n\lambda^{n-2} \\ 0 & t^n\lambda^n & nt^n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n\lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} t^n\lambda^n & nt^n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)t^n\lambda^{n-2} \\ 0 & t^n\lambda^n & nt^n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n\lambda^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{1}{2}t^2e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normi

Merkintä $||\boldsymbol{x}||$ (normi) tarkoittaa pisteen $\boldsymbol{x}$ etäisyyttä origosta, ts. paikkavektorin $\boldsymbol{x}$ pituutta.

Normi

Merkintä $||\boldsymbol{x}||$ (normi) tarkoittaa pisteen $\boldsymbol{x}$ etäisyyttä origosta, ts. paikkavektorin $\boldsymbol{x}$ pituutta.
$||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||$ tarkoittaa pisteiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välistä etäisyyttä, ts. pisteestä $\boldsymbol{x}$ pisteeseen $\boldsymbol{y}$ piirretyn suuntajanan pituutta.

Normi

Merkintä $||\boldsymbol{x}||$ (normi) tarkoittaa pisteen $\boldsymbol{x}$ etäisyyttä origosta, ts. paikkavektorin $\boldsymbol{x}$ pituutta.
$||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||$ tarkoittaa pisteiden $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välistä etäisyyttä, ts. pisteestä $\boldsymbol{x}$ pisteeseen $\boldsymbol{y}$ piirretyn suuntajanan pituutta.

Useita normeja

- Klassinen Euklidinen normi
- Manhattan-normi

Vektoriavaruuksien geometriaa

Kosinilause

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \cos\theta$$

Kosinilause

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \cos\theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y.$$

Kosinilause

$$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||\cos\theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun x, $y \in \mathbb{R}$.

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y.$$

Määritellään

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||\cos\theta,$$

Kosinilause

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \cos\theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y.$$

Määritellään

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \cos\theta,$$

jolloin

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$

Vektoriavaruuksien geometriaa

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

Seuraus

Koska $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$ ja $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$,

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

Seuraus

Koska $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$ ja $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$, on vektoreille $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}) \cdot (y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j})$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

Seuraus

Koska $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$ ja $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$, on vektoreille $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}) \cdot (y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j}) \\ &= x_1 \boldsymbol{i} \cdot y_1 \boldsymbol{i} + x_1 \boldsymbol{i} \cdot y_2 \boldsymbol{j} + x_2 \boldsymbol{j} \cdot y_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} \cdot y_2 \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot \cos 0 = ||\boldsymbol{x}||^2$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

Seuraus

Koska $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1$ ja $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$, on vektoreille $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}$ ja $\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}) \cdot (y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j}) \\ &= x_1 \boldsymbol{i} \cdot y_1 \boldsymbol{i} + x_1 \boldsymbol{i} \cdot y_2 \boldsymbol{j} + x_2 \boldsymbol{j} \cdot y_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} \cdot y_2 \boldsymbol{j} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Huomautus

Jos $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Jos $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ (riviesitys) ja $B = (\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n)$ (sarake-esitys) ovat $n \times n$-matriiseja, on

Vektoriavaruuksien geometriaa

Huomautus

Jos $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Jos $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ (riviesitys) ja $B = (\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n)$ (sarake-esitys) ovat $n \times n$-matriiseja, on

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (lineaarisuus).

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot.

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot. Niin myös välillä $[a, b]$ jatkuvien reaalifunktioiden joukossa $C^0[a, b]$ määritelty

$$(f, g) = \int_a^b fg.$$

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \ldots, p_n > 0$, on

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = p_1 x_1 y_1 + \ldots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \ldots, p_n > 0$, on

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = p_1 x_1 y_1 + \ldots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}^T > 0$ kaikille $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \ldots, p_n > 0$, on

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = p_1 x_1 y_1 + \ldots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}^T > 0$ kaikille $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.
Jos matriisi A on symmetrinen ($A = A^T$) ja positiividefiniitti, on

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^T$$

sisätulo.

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

Esimerkki

$$|x_1 y_1 + \ldots x_n y_n|^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Vektoriavaruuksien geometriaa

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

Esimerkki

$$|x_1 y_1 + \ldots x_n y_n|^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Esimerkki

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$$