Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot. Niin myös välillä $[a, b]$ jatkuvien reaalifunktioiden joukossa $C^0[a, b]$ määritelty

$$(f, g) = \int_a^b fg.$$

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \ldots, p_n > 0$, on

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = p_1 x_1 y_1 + \ldots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}^T > 0$ kaikille $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Jos matriisi A on symmetrinen ($A = A^T$) ja positiividefiniitti, on

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}^T$$

sisätulo.

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

Esimerkki

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n|^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Esimerkki

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$$

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto ||\boldsymbol{x}||$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $||\boldsymbol{x}|| \geq 0$ ja $||\boldsymbol{x}|| = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)
- $||a\boldsymbol{x}|| = |a| \, ||\boldsymbol{x}||$ (skalaarin siirto)
- $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ (kolmioepäyhtälö)

Huomautus

Sisätulo indusoi aina normin:

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})},$$

mutta normeja on aina useita.

Esimerkkejä

Pistetulon indusoima kuvaus

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

on normi.
Myös

$$||\boldsymbol{x}|| = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

on normi.

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ ja $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
- $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (symmetria).
- $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ (kolmioepäyhtälö).

Huomautus

Jokainen normi määrittelee etäisyysfunktion

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||.$$

Määritelmä

Jos V on vektoriavaruus, jossa etäisyysfunktion $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$ määrittelee sisätulon indusoima normi, siis

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Tällöin sanotaan että avaruus on *Euklidinen*.

Huomautus

Ylläolevan määritelmän mukaan Euklidisuus ei ole vektoriavaruuden algebrallinen vaan geometrinen ominaisuus. Vektoriavaruudelle on mahdollista määritellä sekä Euklidisia että epäeuklidisia geometrioita.

Vektoriavaruuksien geometriaa

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \to \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ ja $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (epänegativisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$ (vinosymmetria).
- $(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (lineaarisuus 1. argumentin suhteen).

Määritelmä

Vektoreiden $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ *Hermiten pistetulo* määritellään $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$.

Vektoriavaruuksien geometriaa

Määritelmä

Olkoon $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ jokin sisätulo. Vektorit $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat *ortogonaalit* eli *kohtisuorat* jos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on *ortogonaali*, jos $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Ortogonaali joukko $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ on *ortonormaali*, jos lisäksi $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i) = 1$.

Huomautus

- Jokaisesta ortogonaalista joukosta joka ei sisällä nollavektoria voidaan helposti saada ortonormaali kertomalla kukin $\boldsymbol{x}_i$ norminsa käänteisluvulla $||\boldsymbol{x}_i||^{-1}$.
- $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ on ortonormaali kun sisätuloksi valitaan tavallinen pistetulo.

Lause

Olkoon V vektoriavaruus ja $A = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ joukko, joka ei sisällä nollavektoria ja on ortogonaali jonkin sisätulon $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ suhteen. Tällöin A on lineaarisesti riippumaton.

Vektoriavaruuksien geometriaa

Koordinaattivektorin etsiminen

Jos $B_1 = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on jokin kanta, on jokaiselle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{b}_n,$$

Koordinaattivektori $\boldsymbol{x}_B = (x_1, \ldots, x_n)$ voidaan löytää Gaussin-Jordanin prosessilla (Yleensä työläs prosessi)

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, voidaan kantaesitys

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n,$$

löytää helpommin. Koordinaattivektori $(x_1, \ldots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i)$, jolloin

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i) &= x_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_i) + \ldots + x_i(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) + \ldots + x_n(\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_i) \\ &= x_i(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) = x_i||\boldsymbol{b}_i||^2,\end{aligned}$$

siis

$$x_i = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i)}{||\boldsymbol{b}_i||^2}$$

Määritelmä

Olkoot $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin *vektorin* $\boldsymbol{x}$ *projektio vektorilla* $\boldsymbol{y}$ tarkoittaa sitä origon ja pisteen $\boldsymbol{y}$ kautta kulkevan suoran $L(\boldsymbol{y})$ pistettä $\boldsymbol{x}'$, jolle $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ on kohtisuorassa vektoria $\boldsymbol{y}$ vastaan.

Gramin-Schmidtin ortogonalisointiprosessi

Lause: Jos $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ on lineaarisesti riippumaton joukko ja $(\cdot, \cdot)$ jokin sisätulo, on olemassa ortogonaali joukko $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k\}$, jolle $L(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k) = L(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$