

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2024

Demonstraatio 1, 12.9.2024

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoölyä vaan omaasi.

Huom. Kolmessa ensimmäisessä tehtävässä on vapaus tulkita symbolit \forall ja \exists tavallisesta poikkeavalla tavalla.

1. Ilmaise logiikan väittämä

$$(\forall x)(\exists y)(y = x + 1)$$

sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit jos niitä on.

2. Ilmaise logiikan väittämä

$$(\exists y)(\forall x)(y = x + 1)$$

sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit jos niitä on.

3. Ilmaise logiikan väittämä

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + z = y + z \rightarrow x = y)$$

sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit jos niitä on.

4. Käytä kaksipaikkaista symbolia $A(x, y)$, joka tulkitaan “ x ajaa y :n parran” ja symbolia p joka merkitsee parturia. Esitä lause ”Parturi ajaa parran tarkalleen kaikilta niiltä, jotka eivät itse aja partaansa” käyttämällä edellämäinittuja ja luennolla mainittuja logiikan merkintöjä. Ohje: Voit käyttää kvanttoreita sekä konnektiivia \leftrightarrow , joka tulkitaan siten, että $\phi \leftrightarrow \psi$ on tosi tarkalleen silloin kun lauseilla ϕ ja ψ on sama totuusarvo.

5. Esitä joukko $\{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq x \leq 15 \wedge (\exists y \in \mathbb{Z})(x = 5y)\}$ luettelemalla sen alkiot.

6. Kirjoita summa

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4095}$$

käyttämällä \sum -merkintää.

7. Kirjoita tulo

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{16}{17} \cdot \dots \cdot \frac{400}{401}$$

Käyttämällä \prod -merkintää.

8. Mitä on summan

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

arvo kun $n > 0$? Vihje: Käytä laskinta tai jotain matematiikkaohjelmaa laskeaksesi summan muutamalla pienellä arvolla $n \in \mathbb{N}$ ja tee tämän perusteella arvaus summan arvosta. Osoita sen jälkeen kaava oikeaksi Newtonin binomi-kaavan avulla valitsemalla sopivat luvut a ja b .

9. a) Mikä on termin x^{24} kerroin, kun lauseke

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^{30}.$$

kirjoitetaan auki Newtonin binomikaavaa käyttäen? Vihje: kts. luentoexamplesimerkki.

b) Mikä on termin x^{20} kerroin samassa lausekkeessa?