# Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2024

**Demonstraatio 1, 12.9.2024**

**Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.**

**Huom.** Kolmessa ensimmäisessä tehtävässä on vapaus tulkita symbolit $+$ ja $1$ tavallisesta poikkeavalla tavalla.

1. Ilmaise logiikan väittämä

   $$(\forall x)(\exists y)(y = x + 1)$$

   sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit jos niitä on.

   Mallivastaus: Väittämä sanoo, että jokaista $x$:ää kohti on olemassa sellainen $y$, että $y = x + 1$.

   Esimerkki todesta tulkinnasta: Tulkintajoukko $\mathbb{N}$, jossa symbolille $+$ tavanomainen tulkinta.

   Epätoden tulkinnan olemassaolo riippuu siitä, ajatellaanko symbolin $+$ olevan määritelty koko tulkintajoukossa funktiona. Mikäli näin tehdään, ei ole olemassa epätotta tulkintaa. Jos sen sijaan sallitaan $+$ olevan vain osittain määritelty, on epätosi tulkinta esim. sellainen, jossa tulkintajoukkona toimii esim. $\{1, 2\}$, $1 + 1 = 2$, mutta $2 + 1$ jätetään määrittelemättä.

2. Ilmaise logiikan väittämä

   $$(\exists y)(\forall x)(y = x + 1)$$

   sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit jos niitä on.

   Mallivastaus: Väittämä sanoo, että on olemassa sellainen $y$ siten että kaikilla $x$:illä on $y = x + 1$.

   Epätodeksi tulkinnaksi kelpaa esim. $\mathbb{N}$, jossa symboleilla $+$ ja $1$ on tavanomainen tulkinta.

   Todeksi tulkinnaksi kelpaa esim $\mathbb{Z}$, jossa $+$ tulkitaankin kertolaskuksi ja symboli $1$ tulkitaan nollaksi.

3. Ilmaise logiikan väittämä

   $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + z = y + z \to x = y)$$

   sanallisesti. Onko tulkintajoukkoja joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi? Esitä esimerkit jos niitä on.

   Mallivastaus: Väittämä sanoo, että kaikilla $x$, $y$ ja $z$ ehdosta $x + z = y + z$ seuraa $x = y$. Todeksi tulkinnaksi kelpaa esim. joukko $\mathbb{Z}$, jossa $+$ tulkitaan tavanomaisella tavalla.

   Epätodeksi väittämä voidaan samassa joukossa saada tulkitsemalla $+$ kertolaskuksi: Tällöin arvolla $z = 0$ voidaan huomata että implikaatio ei päde.

4. Käytä kaksipaikkaista symbolia $A(x, y)$, joka tulkitaan “$x$ ajaa $y$:n parran” ja symbolia $p$ joka merkitsee parturia. Esitä lause ”Parturi ajaa parran tarkalleen kaikilta niiltä, jotka eivät itse aja partaansa” käyttämällä edellämainittuja ja luennolla mainittuja logiikan merkintöjä. Ohje: Voit käyttää kvanttoreita sekä konnektiivia $\leftrightarrow$, joka tulkitaan siten, että $\phi \leftrightarrow \psi$ on tosi tarkalleen silloin kun lauseilla $\phi$ ja $\psi$ on sama totuusarvo.

   Mallivastaus: $(\forall x)(A(p, x) \leftrightarrow \neg A(x, x))$

5. Esitä joukko $\{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq x \leq 15 \wedge (\exists y \in \mathbb{Z})(x = 5y)\}$ luettelemalla sen alkiot.

   Mallivastaus: $\{-15, -10, -5, 0, 5, 10, 15\}$

6. Kirjoita summa
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots - \frac{1}{4095}$$
   käyttämällä $\sum$-merkintää.

   Mallivastaus:
$$\sum_{i=1}^{2048} \frac{(-1)^{i+1}}{2i - 1}$$

7. Kirjoita tulo
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{16}{17} \cdot \ldots \cdot \frac{400}{401}$$
   Käyttämällä $\prod$-merkintää.

   Mallivastaus:
$$\prod_{i=1}^{20} \frac{i^2}{i^2 + 1}$$

8. Mitä on summan
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
   arvo kun $n > 0$? Vihje: Käytä laskinta tai jotain matematiikkaohjelmaa laskeaksesi summan muutamalla pienellä arvolla $n \in \mathbb{N}$ ja tee tämän perusteella arvaus summan arvosta. Osoita sen jälkeen kaava oikeaksi Newtonin binomikaavan avulla valitsemalla sopivat luvut $a$ ja $b$.

   Mallivastaus:
$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

9. a) Mikä on termin $x^{24}$ kerroin, kun lauseke
$$(x^4 - \frac{1}{x^2})^{30}.$$
   kirjoitetaan auki Newtonin binomikaavaa käyttäen? Vihje: kts. luentoesimerkki.

   b) Mikä on termin $x^{20}$ kerroin samassa lausekkeessa?

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}(x^4 - \frac{1}{x^2})^{30} &= \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} (x^4)^{30-k} (-x^{-2})^k = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} (-1)^k x^{120-4k} \cdot x^{-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} (-1)^k x^{120-6k}\end{aligned}$$

Kohtaa a) varten selvitetään millä $k$:n arvolla $120 - 6k = 24 \Leftrightarrow k = 16$.

Näin ollen kysytty kerroin on

$$\binom{30}{16} (-1)^{16} = 145422675$$

Samoin kohtaa b) varten selvitetään millä $k$:n arvolla $120 - 6k = 20 \Leftrightarrow k = \frac{50}{3} \notin \mathbb{N}$. Koska $k$ käy läpi vain kokonaisia arvoja, on kysytty kerroin 0.