

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2024

Demonstraatio 2, 19.9.2024

1. Perustele reaaliukujen kunta- ja järjestysaksiioomiin nojautuen, että $1 > 0$.
Vihje: On mahdollista turvautua vasta oletukseen jonka mukaan $1 < 0$ ja johtaa tästä ristiriita.

Mallivastaus: Jos olisi niin, että $1 < 0$, niin tällöin olisi $-1 > 0$ ja siksi $1 = (-1) \cdot (-1)$ olisi positiiviluku samoin kuin -1 . Tämä on ristiriidassa järjestysaksiomien kanssa, sillä niiden mukaan vain toinen, -1 ja 1 voi olla positiiviluku. Tässä jäi vielä perustelematta miksi $(-1)(-1) = 1$, mutta se selviää seuraavassa tehtävässä.

2. Selvitä reaaliukujen aksiioomiin perustuen, miksi $(-1)a = -a$ aina kun $a \in \mathbb{R}$.
Vihje: Koska on jo todettu, että vastaluku on yksikäsitteinen, riittää osoittaa että $(-1)a$ on luvun a vastaluku. Tämä voidaan osoittaa toteamalla että näiden lukujen summa on 0.

Mallivastaus: $(-1)a + a = (-1)a + 1 \cdot a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. Viimeisin yhtäsuuruus on perusteltu luennolla. Näin ollen $(-1)a$ on luvun a vastaluku, siis $(-1)a = -a$.

3. Oletetaan, että $x > 1$. Selitä miksi tällöin $x^2 > x$, $x^3 > x^2$, $x^4 > x^3$, jne.

Mallivastaus: Luennolla mainitun mukaan tulo pienenee, mikäli tulon positiivisia tekijöitä pienennetään (ja ne pysyvät positiivisina). Näin ollen $x^2 = x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$, $x^3 = x^2 \cdot x \geq x^2 \cdot 1 = x^2$, jne.

4. Perustele niin yksinkertaisesti kuin mahdollista, että kunhan $x \geq 10$, on $x^3 - x^2 \geq \frac{9}{10}x^3$. Vihje: $x^3 - x^2 = x^3(1 - \frac{1}{x})$. Kuinka suuri ehdon $x \geq 10$ vallitessa lauseke $1 - \frac{1}{x}$ voi vähintään olla?

Mallivastaus: $x^3 - x^2 = x^3(1 - \frac{1}{x})$. Kun $x \geq 10$, on $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10}$ ja siksi $1 - \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. Näin ollen kun $x \geq 10$, on $x^3 - x^2 = x^3(1 - \frac{1}{x}) \geq \frac{9}{10}x^3$.

5. Oletetaan, että $d(a, c) < 0,02$ ja $d(b, d) < 0,04$. Esitä jokin arvio etäisyydelle $d(a + b, c + d)$. Ohje: viime viikon luentoruudut.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}d(a + b, c + d) &= |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| \\ &\leq 0,02 + 0,04 = 0,06.\end{aligned}$$

6. Oletetaan, että $|a| \leq 20$ ja $|d| \leq 30$ ja että $d(a, c) \leq 0,02$ ja $d(b, d) \leq 0,05$. Esitä jokin arvio etäisyydelle $d(ab, cd)$. Ohje: viime viikon luentoruudut.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}d(ab, cd) &= |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + d(c - d)| \\ &\leq |a(b - d)| + |d(c - d)| = |a||b - d| + |d||c - d| \\ &\leq 20 \cdot 0,05 + 30 \cdot 0,02 = 1,6\end{aligned}$$

7. Olkoot $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ja $g(x) = -x + 1$. Etsi lauseke funktioille $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$

Mallivastaus: $(f \circ g)(x) = (-x + 1)^2 + 3(-x + 1) + 1 = x^2 - 5x + 5$ ja $(g \circ f)(x) = -(x^2 + 3x + 1) + 1 = -x^2 - 3x$.

8. Etsi sellaiset joukot A ja B , että

$$f : A \rightarrow B, f(x) = x^3 - 4x$$

on bijektio. Vihje: Selvitä kuvaaajan kulku ja etsi aluksi jokin joukko jossa f on monotoninen.

Mallivastaus: Koska $f'(x) = 3x^2 - 4$ ja tämän nollakohdat ovat $\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, on funktio kasvava kun $x \geq \sqrt{\frac{4}{3}}$ (koska derivaatta on silloin positiivinen funktio saa myös miten suuria arvoja hyvänsä kun x kasvaa riittävän suureksi. Koska $f(\sqrt{\frac{4}{3}}) = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, voidaan valita $A = [\sqrt{\frac{4}{3}}, \infty)$ ja $B = [-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}, \infty)$. Myös muut valinnat ovat mahdollisia, esim. triviaali valinta $A = B = \{0\}$.

9. Selvitä luennolla esitettyjen määritelmien perusteella mitä on $\sin \frac{\pi}{4}$. Vihje: Voit käyttää geometrista symmetriaa: $\frac{\pi}{4}$ jakaa suoran kulman kahtia, joten kyseisen kulman sini ja kosini ovat yhtä suuret. Sovella sen jälkeen Pythagoraan lausetta.

Mallivastaus: Geometrisen perustelun mukaan kulman $\frac{\pi}{4}$ sini ja kosini ovat yhtä suuret. Jos näitä kumpaakin merkitään x :llä, saadaan Pythagoraan lauseesta $x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Koska kulma sijaitsee 1. neljänneksessä, ovat sekä sinin että kosinin arvot positiivisia.