Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2024

Demonstraatio 3, 26.9.2024

Huom: Vastaukset pitää perustella ilman matematiikkaohjelmia ja laskimia ellei toisin mainita. Älä käytä tekoälyä vaan omaasi.

1. Sievennä $(4+5i)(3-2i)$ ja $\mathrm{Re}(\dfrac{2+3i}{1-2i})$.

   Mallivastaus: $(4+5i)(3-2i) = 4\cdot 3 - 4\cdot 2i + 5\cdot 3i + -5\cdot 2i^2 = 12 - 8i + 15i + 10 = 22 + 7i$ ja $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i-6}{1^2+2^2} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$, joten kysytty reaaliosa on $-\frac{4}{5}$.

2. Etsi kaikki yhtälön $z^2 - 4z + 5 = 0$ ratkaisut luentoesimerkin mukaisella tavalla.

   Mallivastaus: $z = \frac{4+\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4\pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

3. Etsi napakoordinaattiesitys luvulle $-1 + i\sqrt{3}$.

   Mallivastaus: Luvun itseisarvo on $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ ja vaihekulma toteuttaa yhtälön $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1}$. $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, mutta koska luvun reaaliosa on negatiivinen, on tähän lisättävä oikokulma π. Vaihekulmaksi voidaan siis valita $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$.

4. Määritä kaikki kompleksisen logaritmin $\mathrm{Log}(-1 + i\sqrt{3})$ kaikki arvot.

   Mallivastaus: Edellisen tehtävän perusteella $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2e^{(\frac{2\pi}{3}+2\pi n)i}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen

   $$\mathrm{Log}(-1 + \sqrt{3}) = \ln 2 + (\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)i,$$

   missä $n \in \mathbb{Z}$.

5. Määritä potenssin $i^{\frac{1}{2}}$ kaikki arvot seuraavalla tavalla: Merkitse $z = x + iy$ ja yhtälössä $z^2 = i$ vertaa reaali- ja imaginaariosia, jolloin saat yhtälöparin. Ratkaise yhtälöpari.

   Mallivastaus: Tehtävän merkinnöillä $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Yhtäsuuruudesta $x^2 - y^2 + 2xyi = i$ saadaan yhtälöpari

   $$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & 1 \end{cases}.$$

   Ensimmäisen yhtälön perusteella $x = \pm y$. Jos valitaan $x = y$, saadaan toinen yhtälö muotoon $2x^2 = 1$, josta $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Jos taas valitaan $x = -y$, saadaan toinen yhtälö muotoon $-2x^2 = 1$, jolla ei ole reaalisia ratkaisuja. Näin ollen kaikki potenssin $i^{\frac{1}{2}}$ arvot ovat $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$.

6. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritä kaikki kompleksisen potenssin $(-a^2)^{\frac{1}{2}}$ arvot luentoesimerkin mukaisella tavalla.

   Mallivastaus: Koska $a^2 \geq 0$, on luvun $-a^2$ polaariesitys $-a^2 = a^2e^{\pi i} = a^2e^{(\pi+2\pi n)i}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Lasketaan ensin

   $$\mathrm{Log}(-a^2) = \mathrm{Log}(a^2e^{(\pi+2\pi n)i}) = \ln a^2 + (\pi + 2\pi n)i$$

ja
$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a^2) = \frac{1}{2}\ln a^2 + (\frac{\pi}{2} + \pi n)i.$$
Potenssin arvot ovat siis
$$(-a^2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-a^2)} = e^{\ln a} e^{\frac{\pi}{2}i} e^{\pi i n} = aie^{\pi i n},$$
missä $n \in \mathbb{Z}$. Koska n:n kokonaisilla arvoilla $e^{\pi i n}$ saa vain arvot ± 1, ovat kysytyt potenssin arvot $\pm ai$.

7. Etsi yhtälön $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$ kaikki ratkaisut. Ohje: Käytä binomikaavaa, merkitse $w = z - 1$ ja ratkaise ensin w.

   Mallivastaus: Binomikaavan perusteella
$$z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = z^3 - 3z^3 + 3z - 1 - 8 = (z-1)^3 + 8 = w^3 - 8.$$
   Luentoesimerkin mukaan yhtälön $w^3 = 8$ kaikki ratkaisut ovat $2e^{\frac{2\pi n i}{3}}$, missä $n \in \mathbb{Z}$, siis $z = 1 + 2e^{\frac{2\pi n i}{3}}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Näitä on kolme erisuurta, ja ne saadaan valinnoilla $n \in \{0, 1, 2\}$.

8. Mikä on vialla seuraavassa päättelyssä:
$$-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1?$$
   Mallivastaus: Ensimmäinen yhtäsuuruus on oikein, samoin toinen vaikka merkintä $\sqrt{-1}$ ei olekaan yksikäsitteinen, se voi tarkoittaa joko kompleksilukua i tai $-i$. Myös toiseksi viimeisin yhtäsuuruus on kunnossa, joten ongelman täytyy sijaita joko kolmannessa, neljännessä tai viimeisessä yhtäsuuruudessa (tai joissain niistä). Tarkempi tarkastelu osoittaa (sivuutetaan tässä) että neljäs yhtäsuuruus on kunnossa.

   Sen sijaan yksi ongelma on kolmannen yhtäsuuruuden kohdalla, sillä merkintä $\sqrt{-1}$ ei sen oikealla puolella ole yksikäsitteinen, toinen näistä voi yhtä hyvin tarkoittaa kompleksilukua i ja toinen sen vastalukua $-i$. Toinen ongelma on viimeisen yhtäsuuruuden kohdalla: Silloin kun $\sqrt{1}$ käsitetään kompleksiluvun neliöjuurena, ovat sekä 1 että -1 mahdollisia arvoja.

   Päättelyvirhe johtuu siis siitä, että yhtäsuuruuksien ketjussa on yritetty käsitellä neliöjuurta myös kompleksilukujen joukossa funktiona. Neliöjuurta ei kompleksilukujen joukossa kuitenkaan voida perustellusti määritellä funktiona, vaan tällöin kyseessä on matematiikan termein *relaationa* tunnettu käsite, jossa toisin kuin funktiolla, yhdellä alkukuvalla voi olla monia kuvia.

9. Määritä $\cos i$ käyttämällä luennolla esitettyä, Eulerin kaavaan perustuvaa kosinin määritelmää. Arvioi myös laskimella tai matematiikkaohjelmalla kuinka suuri $|\cos i|$ on.

   Mallivastaus:
$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{1}) \approx 1,54308$$